J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(1.º volume)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO
DO
COMPÊNDIO
DE
MATEMÁTICA

J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO
DO
COMPÊNDIO
DE
MATEMÁTICA

(1.º VOLUME)

CURSO COMPLEMENTAR
DO ENSINO SECUNDÁRIO

1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA
Av. Miguel Bombarda, 20 — LISBOA - 1

O texto deste Compêndio *foi utilizado no âmbito de uma experiência de modernização do ensino da matemática em Portugal, dirigida pelo Prof. Sebastião e Silva e realizada pelo Ministério da Educação Nacional em colaboração com a O.C.D.E. (Projecto Especial STP-4/SP). Nesta experiência estiveram envolvidos alunos dos antigos 6.º e 7.º anos do ensino liceal (idades entre 15 e 17 anos).*

ADVERTÊNCIA PRÉVIA

O Compêndio de Matemática *é destinado a servir, não só como auxiliar de estudo para o aluno, mas ainda como complemento de formação para o professor. Daí o desenvolvimento e o pormenor com que foi escrito. Cabe pois ao critério e ao bom senso do professor dosear a densidade do ensino com base no* Compêndio.

Este, por outro lado, não contém todos os assuntos a desenvolver nas turmas experimentais do 6.º *ano* [1]. *Em alguns casos será necessário recorrer aos livros adoptados, tal como se indica no presente* Guia [2] *e no próprio* Compêndio.

---

(1) Refere-se o autor às turmas do ensino liceal nas quais, na altura da primeira edição fotocopiada do presente *Guia*, se desenvolveu a experiência pedagógica de modernização do ensino da matemática.

(2) Este *Guia* corresponde ao 1.º volume do *Compêndio de Matemática* (1.º e 2.º tomos).

NORMAS GERAIS

1. A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.

2. A par da intuição e da imaginação criadora, há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico. Isto consegue-se, principalmente, ao tratar da *definição* dos conceitos e da *demonstração* dos teoremas, em que a participação do aluno deve ser umas vezes parcial (em diálogo com o professor) e outras vezes total (encarregando cada aluno de expor um assunto, após preparação prévia em trabalho de casa).

3. Muito raramente se deve definir um conceito sem ter partido de exemplos concretos e, tanto quanto possível, sugestivos. Se a preparação psicológica tiver sido bem conduzida, será muitas vezes o aluno quem acabará por definir espontaneamente o conceito, com ou sem ajuda do professor. *Em qualquer caso, este deverá encaminhar o aluno para o rigor de linguagem, que equivale a dizer, de pensamento.* Para isso, será de grande auxílio a introdução à lógica matemática, feita logo de início.

4. Quanto à demonstração dos teoremas, deve seguir-se com frequência uma norma semelhante à anterior. É altamente desejável que o aluno seja muitas vezes posto em condições de *ver* o teorema antes de o demonstrar e que essa *visão* o encaminhe a construir por si mesmo a demonstração, mais ou menos impecável do ponto de vista lógico. *Não esquecer que, na investigação matemática, a intuição precede normalmente a lógica.*

5. A ordem lógica na apresentação dos assuntos não é muitas vezes a mais aconselhável do ponto de vista didáctico. Normalmente o aluno só pode tomar consciência da necessidade de certo grau de rigor, depois de ter compreendido os assuntos em *primeira aproximação* ou *de modo intuitivo*, exactamente como sucede na inves-

tigação. Assim, em vez da ordem lógica, haverá que seguir de preferência a dialéctica do *intuitivo-racional* e do *concreto-abstracto*, em que o grau de rigor lógico se irá elevando progressivamente, com a adesão espontânea do aluno.

6. Para desenvolvimento do sentido crítico, é essencial encorajar o aluno à discussão livre e disciplinada, habituando-o a expor com calma e sem timidez os seus pontos de vista e a examinar serenamente e com interesse as opiniões dos outros.

7. Ao seguir o método activo, o professor deve evitar que os alunos falem todos ao mesmo tempo. Quando um aluno tiver algo a dizer, levantará o braço. Compete então ao professor escolher entre vários.

Muitas vezes o professor chamará um aluno à secretária ou à pedra. O aluno deverá então movimentar-se rapidamente e com o mínimo ruído. Deste modo se estabelece o *dinamismo disciplinado*, que caracteriza a vida em corpo são, e que é indispensável ao êxito do método activo.

Não esquecer que o ruído é desfavorável à concentração intelectual, e que tentar conciliar as duas coisas reverte geralmente em prejuízo do sistema nervoso, contribuindo para o desenvolvimento de um dos maiores flagelos da nossa época. *A melhor sala de aula será muitas vezes a que estiver mais afastada da via pública* (1).

8. A matemática não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto. É também um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve sempre ter presente este facto e tentar estabelecer, sempre que possível, as conexões da matemática com outros domínios do pensamento, atendendo a que muitos dos seus alunos irão ser físicos, químicos, biólogos, geólogos, engenheiros, economistas, agrónomos ou médicos.

9. Na aprendizagem da matemática não basta ter intuição, compreender, definir e raciocinar. É também indispensável adquirir

---

(1) Estão infelizmente a multiplicar-se os casos de alunos com depressões nervosas de índole grave. Se um dia se proceder, como se impõe, ao estudo sério deste problema, há-de chegar-se provavelmente à conclusão de que uma das causas preponderantes desse fenómeno é o ruído de que o aluno vive geralmente rodeado.

certos automatismos psicológicos. Isto vale, especialmente, no que se refere a *técnicas de cálculo*. Tais técnicas são mais perfeitamente assimiladas quando o aluno conhece bem os fundamentos teóricos das mesmas. *Mas esse conhecimento não basta: o professor deve insistir para que os alunos se treinem bastante em exercícios equilibrados, que requeiram a aplicação das referidas técnicas.*

10. O treino recomendado na norma anterior não deve confundir-se de modo nenhum com a mecanização do aluno na resolução de exercícios por meio de receitas, aplicadas sem qualquer conhecimento de causa. Essa prática, tal como se tem generalizado entre nós, só contribui para desvirtuar completamente a finalidade do ensino da matemática, habituando o aluno a *não pensar* e destruindo nele toda a iniciativa e toda a espontaneidade para a resolução de problemas essencialmente novos, como os que são postos a cada passo pela ciência, pela técnica e pela vida corrente.

11. Alunos e professor devem assumir nas aulas uma atitude descontraída [1], que afaste tanto quanto possível do espírito dos alunos a ideia da *nota* que irão ter no fim do período (lembrando que o seu interesse principal é aprender) e modere no espírito do professor a ideia de que é *juiz* (lembrando que a sua missão é, acima de tudo, ensinar). *Assim, o que deve dominar nas aulas é o interesse pelos assuntos tratados.* Estes não têm necessariamente de ser todos reduzidos à forma de exercícios escritos (o que é muitas vezes um modo de os tornar abomináveis). Especialmente no que se refere a demonstrações — *um aspecto em que é preciso insistir muito* — o professor deverá recorrer de preferência ao sistema de *chamadas breves.*

12. É dialogando com os alunos que o professor acaba muitas vezes por esclarecer, para si próprio, certos assuntos que pretende ensinar. Isto não vem senão corroborar um velho preceito:

A melhor maneira de aprender é ensinar.

Haja em vista os Diálogos de Platão. No «Teeteto» é definida explicitamente por Sócrates a missão do mestre: *ajudar a virem à luz as ideias na mente do discípulo.* E quantas vezes, no mesmo instante, não se ilumina a mente do professor!

---

(1) Descontracção não implica má-criação.

13. Nesta ordem de ideias, o professor deve combater no aluno, e em si próprio, o receio de errar, enquanto se trata de fazer um esforço sincero para aprender ou ensinar. Porque só errando se aprende verdadeiramente. Ai daqueles que não aprendem à custa da própria experiência e dos próprios erros, porque esses pouco ou nada aprendem, na verdade.

14. O método heurístico (ou de redescoberta) só a princípio poderá parecer mais moroso. A criança que aprende a andar com aparelhos ou a pessoa que aprende a nadar com flutuadores só ilusoriamente aprende mais depressa: na realidade aprende mais devagar e pior.

15. São por vezes obstáculos à aplicação do método heurístico os dois casos extremos que podem surgir numa turma: alunos muito bons e alunos francamente maus, especialmente os repetentes. Os primeiros estão sempre prontos a responder, não deixando tempo aos restantes para pensar (*vide* norma 7). Os segundos criam uma atmosfera de desinteresse, porventura mesmo de indisciplina, ou então já conhecem a *receita*, que aprenderam no ano anterior, acabando assim por viciar o processo heurístico. Cabe ao bom senso do professor encontrar uma solução de equilíbrio, tendo presente a norma 7.

16. Terminaremos estas considerações, traduzindo algumas das medidas preconizadas na América para a renovação do ensino geral:

a) O ensino em todos os graus terá de se tornar mais flexível, mais adaptado, quer às solicitações dum mundo em rápida evolução, quer às aptidões dos indivíduos.

b) Necessitamos de métodos aperfeiçoados para descobrir talentos e levá-los a atingir a plena maturidade.

c) Não devemos encorajar, seja de que modo for, qualquer sistema de ensino que tenda a criar uma geração de bárbaros, incapazes de apreender uma ideia que não lhes seja «programada» por outro cérebro [1].

---

(1) Alusão aos programas feitos pelo homem para os «cérebros» electrónicos, que não *pensam*, mas se limitam a executar *mecanicamente* esses programas.

I

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO I

1. A lógica matemática é um meio poderoso para habituar o aluno à clareza e ao rigor, tanto da linguagem como do pensamento. Esta introdução constitui, ao mesmo tempo, uma excelente oportunidade para despertar no aluno o interesse pela discussão bem conduzida, *o gosto da dialéctica.*

A experiência dos anos anteriores tem demonstrado que este capítulo, bem como o seguinte, encontram a melhor aceitação por parte dos alunos. O professor poderá portanto tratá-lo relativamente depressa, tanto mais que todas as noções aqui introduzidas serão depois constantemente utilizadas nos capítulos seguintes.

2. A distinção entre *designação* e *designado* (em particular a distinção entre *fracção* e *número fraccionário*) é importante, mas basta que fique esclarecida na aula, neste momento e mais tarde, quando venha a propósito. Não é contudo necessário fazer deste assunto um *cavalo-de-batalha* e incluí-lo em exercícios escritos.

3. Quanto à noção de conjunto (ou classe), introduzida intuitivamente nos n.os 5, 6, 7 e 8, convém notar que a palavra 'classe' é usada hoje, tecnicamente, por lógicos matemáticos, com um significado ainda mais geral que o da palavra 'conjunto', para evitar o paradoxo de Russell da teoria dos conjuntos. Mas a distinção é inacessível nesta fase elementar e pode por enquanto evitar-se, utilizando a distinção em tipos lógicos. Aliás, o próprio assunto dos tipos lógicos deverá ser apenas tocado ao de leve, porquanto o aluno ainda não tem suficiente receptividade para este género de questões. Pelo contrário, o professor necessita de ter ideias bem claras e assentes sobre o assunto.

4. O aluno deverá, logo a partir da 3.ª ou 4.ª lição, ser familiarizado com as operações lógicas elementares. Inicialmente, as

tabelas de verdade poderão ser apresentadas com aspecto mais acessível do que no *Compêndio*. Por exemplo, para a conjunção, para a disjunção inclusiva, para a disjunção exclusiva e para a implicação, poderão usar-se as seguintes disposições:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V
V	F	F

5. Quanto às propriedades das operações (págs. 32 e 33, 1.º tomo), convém acrescentar as *propriedades da idempotência* da conjunção e da disjunção, que consistem no seguinte:

$$a \wedge a = a \quad , \quad a \vee a = a \quad \text{(qualquer que seja a).}$$

Estas propriedades podem ser estabelecidas directamente ou deduzidas das restantes (como se faz na pág. 186 do 2.º tomo, o que pode agora dispensar-se).

São de grande interesse e actualidade os exercícios sobre logigramas (desenhos de circuitos correspondentes a dadas expressões lógicas). Para isso pode ver-se o exercício X do final do Capítulo VI do Compêndio *(págs. 194-195, 2.º tomo).*

6. O termo 'polissilogismo' é introduzido no n.º 17 com significado mais geral do que lhe é atribuído em lógica tradicional. É talvez preferível substituí-lo aqui por 'cadeia de silogismos'.

Dum modo geral, os exemplos em linguagem comum consomem tempo excessivo quando escritos na pedra. Este inconveniente pode ser atenuado, recorrendo de vez em quando a cartões em que se tenham escrito previamente os exemplos, ou utilizando directamente o próprio *Compêndio.*

7. A propósito dos universos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ (pág. 57, 1.º tomo), o professor deve certificar-se de que o aluno tem *conhecimento intuitivo,* adquirido em anos anteriores, desses e outros universos numéricos. Podem também ser introduzidos já os símbolos $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros relativos: 0, 1, − 1, 2, − 2, ...), $\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais, inteiros — os anteriores — e fraccionários: $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, 2,57, − 2,57, etc.), $\mathbb{Q}^+$ (conjunto dos racionais positivos) e $\mathbb{R}^+$ (conjunto dos reais positivos).

Quanto a números irracionais, bastará por enquanto que o aluno conserve a noção, adquirida no 2.º ciclo, de que as dízimas infinitas não periódicas (e só essas) representam números irracionais. Devem recordar-se os exemplos clássicos do número π e dos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, etc., bem como dos respectivos simétricos, ficando para mais tarde a demonstração da irracionalidade de alguns deles (o professor dirá 'prova-se que...' e, se houver alunos muito interessados, poderá antecipar a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$).

Por outro lado, deverá recordar-se como se faz, intuitivamente, *a representação geométrica dos números reais.*

Já nas normas gerais se observou que a *intuição precede a lógica* e que *a ordem lógica não coincide muitas vezes com a ordem didáctica mais recomendável.* Seria um erro grave evitar, neste momento, falar de números naturais, números racionais e números reais, quando o aluno já desde o ensino primário veio adquirindo noções intuitivas sobre estas diferentes espécies de números. Tais noções só a pouco e pouco, directa ou indirectamente, poderão ir sendo esclarecidas e aperfeiçoadas, do ponto de vista lógico.

8. Logo após o n.º 23 do Capítulo I, deverão reservar-se algumas aulas à aplicação dos conhecimentos adquiridos ao estudo de equações e inequações, embora esse estudo venha a ser depois retomado no Capítulo VI, em termos de muito maior generalidade, a respeito de equações em corpos abstractos. Será este um óptimo pretexto para aperfeiçoar técnicas de cálculo adquiridas no 2.º ciclo e revistas agora em condições de maior rigor lógico.

Os enunciados dos princípios de equivalência para equações em $\mathbb{R}$ (incluindo o princípio de decomposição) são, *mutatis mutandis*, os que se apresentam no Capítulo VI, págs. 91-98, 2.º tomo; em vez de 'elemento de K' diremos agora simplesmente 'número'. A ideia das demonstrações é também a mesma que se apresenta nessas páginas. As propriedades dos números reais que intervêm nessas demonstrações já são conhecidas intuitivamente pelos alunos. (Os princípios lógicos de equivalência devem ser tratados após o n.º 23.)

Nesta fase será usado sistematicamente o sinal de equivalência (quando aplicável), podendo no entanto dispensar-se o ponto indicativo de que a equivalência é formal, quando não haja lugar para dúvida ou confusão. Exemplo:

$$\left(\frac{x-4}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 8x + 16}{4} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

O aluno indicará onde e como intervêm os princípios de equivalência.

Mais tarde, o próprio sinal de equivalência poderá ser dispensado: não é necessário ficar acorrentado a um símbolo, quando este for utilizado apenas para esclarecimento didáctico.

9. Os princípios de equivalência para as inequações em $\mathbb{R}$ enunciam-se e demonstram-se de modo análogo. O 2.º princípio baseia-se nas conhecidas propriedades:

$$a + b < c \Leftrightarrow a < c - b \quad , \quad a < b + c \Leftrightarrow a - b < c$$

Estas são uma consequência directa da propriedade:

$$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$$

Para o reconhecer, basta aplicar esta propriedade às fórmulas $a + b < c$, $a < b + c$, com $x = a + b$, $y = c$, $z = - b$ no 1.º caso e $x = a$, $y = b + c$, $z = - b$ no 2.º caso, atendendo à associatividade da adição e à definição do simétrico.

O 3.º princípio de equivalência para inequações assenta nas seguintes propriedades, já conhecidas do aluno:

Se $k > 0$, *então* $a < b \Leftrightarrow ak < bk$, *quaisquer que sejam* a, b.

Se $k < 0$, *então* $a < b \Leftrightarrow ak > bk$, *quaisquer que sejam* a, b.

Quanto ao princípio de decomposição para inequações, o seu aspecto é diferente daquele com que se apresenta para equações. Não vale a pena procurar enunciá-lo de modo geral; basta mostrar como se aplica na prática. No fundo, o que intervém aqui é apenas a *regra dos sinais* para a multiplicação de números reais. Seja por exemplo a inequação $x^2 < 9$. Tem-se, aplicando os dois primeiros princípios de equivalência:

$$x^2 < 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow (x - 3)\ (x + 3) < 0$$

Procuram-se pois os valores de x que tornam negativo o 1.º membro da equação. Ora, segundo a regra dos sinais, será:

$$(x - 3)\ (x + 3) < 0 \quad \text{sse} \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases},$$

isto é [1]:

$$(x-3)\ (x+3) < 0 \Leftrightarrow (x-3 > 0 \wedge x+3 < 0) \vee (x-3 < 0 \wedge x+3 > 0).$$

Como o primeiro sistema é impossível, segue-se que

$$x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

---

(1) **Não esquecer que a chaveta desempenha o papel do sinal de conjunção.**

Na prática pode sempre adoptar-se o seguinte esquema bem conhecido (uma vez compreendida a sua justificação, o que é quase imediato):

		-3		3	
$x+3$	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
x^2-9	$+$		$-$		$+$

É claro que este processo pode ser aplicado a produtos com mais de dois factores ou ainda a quocientes. *Por outro lado, convém considerar também condições de outros tipos, em que, no lugar dos sinais* $=$, $<$, $>$, *figurem os sinais* $\leqslant$, $\geqslant$ ou $\neq$.

Seja por exemplo a condição:

$$(1) \qquad \frac{1-x^4}{2x^2-1} \geqslant 0$$

a qual é manifestamente equivalente a

$$(1') \qquad \frac{(x+1)\ (x-1)\ (x^2+1)}{\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)} \leqslant 0$$

Tem-se agora o seguinte quadro:

		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
1.º membro de (1′)	$+$	0	$-$		$+$		$-$	0	$+$

Para $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, a expressão não assume nenhum valor em $\mathbb{R}$.

Virá, pois:

$$\frac{1 - x^4}{2x^2 - 1} \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1$$

O mesmo quadro mostra que

$$\frac{1 - x^4}{2x^2 - 1} < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x > 1,$$

$$\frac{1 - x^4}{2x^2 - 1} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -1, \text{ etc.}$$

É claro que, entre o primeiro exemplo e o segundo, o professor terá o cuidado de intercalar exemplos graduados de complexidade crescente. Convém insistir em exemplos *simples*, como os seguintes:

$$x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\frac{1}{x^2 - 4} = 0 \text{ é impossível}$$

$$\frac{x - 2}{x + 2} \geqslant 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x \geqslant 2, \text{ etc.}$$

10. Até aqui temos considerado apenas exemplos em que a decomposição se faz rapidamente, aplicando propriedades elementares. Pode-se ir mais longe e fazer *directamente* a factorização de trinómios de 2.º grau de coeficientes numéricos. *Esta prática é muito recomendável, para evitar cair, desde logo, nas clássicas receitas sobre o trinómio, que o aluno aplica mecanicamente. Se o ensino for bem conduzido, o próprio aluno irá redescobrir, espontaneamente, ao fim de alguns exercícios, os teoremas sobre o sinal da função quadrática* (é claro que muitos dos exercícios poderão e deverão ser trabalhos de casa).

Seja, por exemplo, a inequação $x^2 - 6x + 5 < 0$. Tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &\equiv x^2 - 2 \times 3 \cdot x + 9 - 9 + 5 \\ &\equiv (x-3)^2 - 4 \equiv (x - 3 - 2)\ (x - 3 + 2) \\ &\equiv (x-5)\ (x-1) \end{aligned}$$

Portanto:

$$x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow (x-5)\ (x-1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 5$$

Analogamente, para $x^2 - 7x + 10 > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &\equiv x^2 - 2 \times \frac{7}{2} \cdot x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 10 \\ &\equiv \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \equiv \left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ &\equiv (x-5)\ (x-2) \end{aligned}$$

donde

$$x^2 - 7x + 10 > 0 \Leftrightarrow (x-5)\ (x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 5$$

Outro exemplo:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Por sua vez, para a inequação $x^2 - 6x + 14 > 0$, vem:

$$x^2 - 6x + 14 \equiv (x-3)^2 - 9 + 14 \equiv (x-3)^2 + 5$$

Como $(x-3)^2$ é *maior* ou *igual* a zero para todo o valor de x, segue-se que $x^2 - x + 1 \geqslant 0$ *qualquer que seja* x: a condição dada é portanto universal. Ao mesmo tempo se reconhece que as condições $x^3 - 6x + 14 < 0$, $x^2 - 6x + 14 = 0$, $x^2 + 14 \leqslant 6x$ são impossíveis, etc.

Não se fala por enquanto de raízes imaginárias. Bastará dizer que a equação $x^2 - 6x + 14 = 0$ *não tem raízes em* $\mathbb{R}$. Os números imaginários pouco ou nenhum préstimo têm na teoria das equações do 2.º grau.

Deve dizer-se ao aluno que, se deseja ser conduzido a uma boa compreensão da matemática, que lhe será muito útil no futuro, terá conveniência em seguir esta orientação, evitando a princípio todo o uso de fórmulas ou regras mecanizantes.

11. Será vantajoso introduzir desde já, antes do n.º 24 do *Compêndio*, o conceito de *implicação formal*, directamente, como se fez para a equivalência. Só mais tarde se verá como a implicação formal se exprime por meio da implicação material e do quantificador universal, ponto este delicado, que será abordado no n.º 28, págs. 76-79, 1.º tomo.

Sejam, por exemplo, as condições:

x *é peixe* [1] , x *tem guelras*

Pergunta-se aos alunos: são estas condições equivalentes? Seguir-se-á uma breve discussão, em que serão certamente invocados conhecimentos biológicos e a resposta acabará por ser negativa, visto que *todo o peixe tem guelras, mas há animais que têm guelras e não são peixes (quais?).* O mais que se pode dizer agora é que a primeira condição *implica formalmente* a segunda, isto é, que todo o indivíduo que verifica a primeira também verifica a segunda. Exprime-se este facto, escrevendo:

$$x \text{ é peixe} \underset{\bullet}{\Rightarrow} x \text{ tem guelras}$$

por analogia com o que se fez para a equivalência formal (muitas vezes, quando não há perigo de confusão, omite-se o ponto, o que, no entanto, será sempre um *abuso de escrita*).

Importa mais uma vez salientar que as expressões proposicionais exprimem *propriedades* (ou *atributos*) e convém apresentar exemplos de implicação formal em linguagem comum:

Ser peixe implica ter guelras (isto é, o atributo *ser peixe* implica o atributo *ter guelras).*

Ser daltónico implica não poder conduzir automóvel.
Ser homem implica ser mortal.
Ser casado implica não ser solteiro.
Ser múltiplo de 6 *implica ser múltiplo de* 3.
Ser múltiplo de 15 *implica ser múltiplo de* 3 *e de* 5.
Ser múltiplo de 3 *e de* 5 *implica ser múltiplo de* 15.
Ser triângulo equilátero implica ser triângulo equiângulo.
Mau comportamento na aula implica falta de civilização.
Ser peixe implica ter escamas e respirar por guelras.
Ser homem implica ser bípede implume.

---

[1] Subentende-se 'peixe vivo, não amputado'.

Nova discussão se poderá seguir, sobre o valor lógico de tais proposições e sobre os casos em que há equivalência formal. (Convide-se o aluno a traduzir algumas destas frases em escrita simbólica.)

Convém também apresentar desde já exemplos de implicações formais, entre condições com mais de uma variável:

$$\text{x é irmão de y} \wedge \text{y é mãe de z} \underset{\bullet}{\Rightarrow} \text{x é tio de z}$$

$$\text{X ofendeu Y} \underset{\bullet}{\Rightarrow} \text{X deve pedir desculpa a Y}$$

$$a > b \wedge b = c \underset{\bullet}{\Rightarrow} a > c$$

etc.

Não esquecer que, nestes casos, o símbolo $\underset{\bullet}{\Rightarrow}$ se pode ler 'implica formalmente', 'implica necessariamente' ou simplesmente 'implica'. Também se pode traduzir pela condicional 'se' anteposta à primeira condição ou mais precisamente por 'se... então necessariamente' ou ainda por 'se... então' (tudo isto será dito ao aluno, a propósito dos exemplos).

12. As considerações anteriores estendem-se imediatamente à relação $\underset{\bullet}{\Leftarrow}$ ('é implicado formalmente por' ou 'é implicado por') e devem desde logo ser aplicadas ao estudo de equações e inequações. Por exemplo:

$$x^2 < 4 \Rightarrow x < 2 \quad , \quad x^2 = 4 \Leftarrow x = 2$$

$$x < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \quad , \quad x < 2 \wedge x > -2 \Rightarrow x^2 < 4$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad (\text{em } \mathbb{R})$$

etc.

(Convidar o aluno a reconhecer quais destas proposições são verdadeiras e quais são falsas.)

É esta a melhor preparação para o estudo das equações irracionais e mais um meio de esclarecer o conceito de equivalência. O 2.º princípio lógico de equivalência estende-se, *mutatis mutandis*, à implicação formal, nos seguintes termos:

Se uma condição implica formalmente outra condição, a implicação formal mantém-se no mesmo sentido, substituindo uma ou mais variáveis por quaisquer outras expressões designatórias [1].

---

(1) A implicação material é considerada como caso particular de implicação formal.

(Estes princípios irão depois aparecer como consequência das regras de substituição de variáveis aparentes, relativas a quantificadores universais, como se indica no n.º 25, pág. 70.)

Considere-se, por exemplo, a proposição

(1) $$a = b \Rightarrow a^2 = b^2 \text{ (no universo } \mathbb{R})$$

que é reconhecidamente verdadeira. Pergunte-se ao aluno: Será também verdadeira a recíproca? Em caso de hesitação apresente-se um contra-exemplo, como o seguinte:

Tem-se $5^2 = (-5)^2$. Podemos concluir que $5 = -5$?

Seja agora a equação

$$2 + \sqrt{x} = x$$

Tem-se $2 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2$. Ora, substituindo *a* e *b* em (1) respectivamente por $\sqrt{x}$ e $x - 2$, vem, segundo o princípio anterior:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x - 2)^2$$

Por sua vez:

$$x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Virá, portanto:

$$2 + \sqrt{x} = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Mas a segunda equação não implica a primeira. Com efeito, as raízes da segunda são 1 e 4, e destas só 4 é raiz da primeira como se pode verificar directamente. (Note-se: há duas raízes quadradas de 1, que são 1 e -1, *mas o símbolo* $\sqrt{1}$ *designa unicamente a raiz não negativa, ou seja* 1.) Por conseguinte, a equação proposta tem uma só raiz, que é 4: ao elevar ao quadrado ambos os membros de $\sqrt{x} = x - 2$, introduziu-se a *solução estranha* 1.

Virão depois outros exemplos de equações com um ou, *no máximo,* dois radicais quadráticos (ver *Compêndio de Álgebra, 7.º ano,* os exemplos e exercícios mais simples do Capítulo XVIII).

13. Tratando-se da equação $x - \sqrt{x^2 + 2} = 1$, conclui-se que

$$x - \sqrt{x^2 + 2} = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 0$$

A segunda tem uma única raiz, que é $-\frac{1}{2}$. Ora, verifica-se que $-\frac{1}{2}$ não é raiz da primeira. Logo a equação proposta não tem nenhuma raiz: *é uma equação impossível.* Surge porém a dúvida, que é preciso focar bem:

Fará sentido dizer que uma condição impossível implica outra que é possível?

Segundo a definição anterior, diz-se que uma condição implica outra, quando *toda a solução da primeira* também é solução da segunda. Ora, na linguagem comum, quando se diz 'toda a solução da primeira', parece subentender-se que a primeira tem *pelo menos* uma solução. É este mais um dos inconvenientes lógicos da linguagem comum.

Para evitar dúvidas, a definição de implicação formal, entre condições comuns com uma variável, poderia ser enunciada do seguinte modo, em linguagem comum:

Uma condição implica outra, quando todo o elemento que verifica a primeira também verifica a segunda, ou quando todo o elemento que não *verifica a segunda também* não *verifica a primeira.*

Segundo esta definição é fácil ver que:

Uma condição impossível implica qualquer outra condição.

Porém, como se verá posteriormente, o conceito de implicação formal ficará rigorosamente definido a partir dos conceitos de implicação material e de quantificador universal. A vantagem duma antecipação em linguagem comum é, naturalmente, de ordem didáctica. Ver-se-á depois que a propriedade anterior se obtém aplicando a PROPRIEDADE DA CONVERSÃO à seguinte, que é evidente:

Uma condição universal é implicada por qualquer outra condição.

Por exemplo, em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$x < 1 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \quad \text{donde} \quad x^2 + 1 \leqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$$

14. A parte restante do Capítulo I, relativa a quantificadores e suas relações com as operações lógicas elementares, pode agora ser tratada em melhores condições de rendimento para os alunos. Convém insistir nos exemplos de quantificação múltipla e de aplicação das 2.as leis de De Morgan.

Segue-se a já aludida conexão entre implicação formal e implicação material (e analogamente para a equivalência). Trata-se de um ponto delicado que importa esclarecer, mas agora em melhores condições. Na experiência feita em 1964-65 verificou-se que, só com auxílio destas noções, a maior parte dos alunos compreendeu *pela primeira vez* a distinção entre os conceitos de *condição necessária* e *condição suficiente*.

Para melhor compreender a relação entre os conceitos de implicação material e implicação formal, é muito útil dar exemplos de negação de implicações formais, como os seguintes:

$$\sim (\text{n é par} \underset{\bullet}{\Rightarrow} \text{n não é primo}) \Leftrightarrow \underset{n}{\exists} (\text{n é par} \wedge \text{n é primo})$$

$$\sim (\text{x é peixe} \underset{\bullet}{\Rightarrow} \text{x tem guelras}) \Leftrightarrow \underset{x}{\exists} (\text{x é peixe} \wedge \text{x não tem guelras})$$

É também conveniente apresentar exemplos de implicação (ou equivalência), que sejam formais relativamente a certas variáveis, e não relativamente a outras. Por exemplo, a propriedade em que se baseia o 2.º princípio de equivalência das equações pode ser traduzida simbolicamente do seguinte modo:

$$k \neq 0 \underset{k}{\Rightarrow} (a = b \underset{a,\,b}{\Leftrightarrow} ka = kb)$$

Analogamente para as inequações:

$$k > 0 \underset{k}{\Rightarrow} (a > b \underset{a,\,b}{\Leftrightarrow} ka > kb)$$

$$k < 0 \underset{k}{\Rightarrow} (a < b \underset{a,\,b}{\Leftrightarrow} ka < kb)$$

Note-se que, em qualquer dos casos, a equivalência é formal relativamente às variáveis a, b, mas não relativamente a k. Por sua vez, a primeira implicação considerada é formal relativamente à única variável livre que resta: a variável k.

Registe-se ainda a definição de número primo que é dada simbolicamente na pág. 83, 1.º tomo.

15. A propósito das abreviaturas das relações de parentesco (pág. 83, 1.º tomo), é talvez preferível adoptar as seguintes:

F = é filho ou filha de,
I = é irmão ou irmã de,
S = é sobrinho ou sobrinha de,
T = é tio ou tia de.

16. O número 31 do Capítulo I, pág. 84, 1.º tomo, relativo a *existência e unicidade*, é também muito importante. Se a turma não estiver em atraso, é talvez conveniente introduzir, desde já, o símbolo de explicitação, tal como se faz no n.º 20 do Capítulo IV (págs. 211-212, 1.º tomo) mas começando por exemplos colhidos fora do âmbito restrito da matemática. Seja a condição:

x *inventou a lâmpada eléctrica (de incandescência)*

Como existe *um único* indivíduo que verifica esta condição (existência em sentido intemporal), podemos designá-lo pela expressão

ι_x (x inventou a lâmpada eléctrica),

que se lê *'aquele indivíduo* x *tal que* x *inventou a lâmpada eléctrica'* ou, em linguagem corrente, *'o indivíduo que inventou a lâmpada eléctrica'* ou ainda *'o inventor da lâmpada eléctrica'*. A designação habitual deste indivíduo é 'Edison', de modo que podemos escrever:

ι_x (x inventou a lâmpada eléctrica) = Edison

Porém a expressão

ι_x (x é um homem $\wedge$ x foi à Lua)

não tem sentido, porque não existe nenhum elemento x que verifique a condição entre parêntese; e a expressão

ι_x (x é satélite de Marte)

não tem sentido, porque existe *mais de um* satélite de Marte. Analogamente para a expressão

ι_x (x inventou o telefone)

Podem seguir-se os exemplos numéricos dados nas págs. 211-212, excluindo, por enquanto, os que utilizam o símbolo $\{ x : \}$. Faça-se o aluno notar que

$$\iota_x \, (3x = 2) = \frac{2}{3},$$

mas que as expressões $\iota_x \, (0 \cdot x = 2)$ e $\iota_x \, (0 \cdot x = 0)$ não têm sentido em $\mathbb{R}$.

O papel do operador de explicitação é muitas vezes desempenhado em linguagem comum por pronomes relativos. Exemplos:

O poeta que escreveu Os Lusíadas,
O aluno a respeito do qual falámos ontem,
O número positivo cujo quadrado é 2,
etc.

As designações indirectas como estas (em linguagem comum ou simbólica) são chamadas *descrições*, por Bertrand Russell, a quem se deve a teoria de tais designações.

ADITAMENTO AO N.º 8, PÁG. 18, DESTE GUIA

No estudo das equações, devem surgir naturalmente ao aluno equações impossíveis e equações indeterminadas, como as do exercício I da pág. 100, 2.º tomo, do *Compêndio*. O aluno não terá dificuldade em reconhecer que as equações $0x = a$, com $a \neq 0$, e $0x = 0$, às quais se reduzem as propostas, são respectivamente impossível e universal.

II

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO II

1. Neste capítulo é feita a tradução da *lógica de atributos* (também chamada *'cálculo de predicados'*) na *lógica de conjuntos* (também chamada *'cálculo de classes'*). É necessário que o aluno tome bem consciência de que, uma vez fixado o universo, a lógica de atributos é equivalente à lógica de conjuntos. Entre uma e outra existe apenas uma diferença de linguagem ou de ponto de vista psicológico: *ponto de vista da compreensão*, no primeiro caso; *ponto de vista da extensão*, no segundo caso.

Por exemplo, no universo dos seres vivos, o atributo *'felino doméstico'* define um conjunto, também denominado *'conjunto dos gatos'*. Convém desde logo recorrer a exemplos familiares e, tanto quanto possível, sugestivos para os alunos, como os que se apresentam no Capítulo VII, n.º 1, pág. 197, 2.º tomo.

2. A equivalência entre atributos (ou propriedades) traduz-se na identidade entre conjuntos (ou classes). Assim, os atributos

gato, felino doméstico,

são *equivalentes;* definem, por isso, o mesmo conjunto. Analogamente para os atributos

triângulo equilátero, triângulo equiângulo,

no universo das figuras da geometria euclidiana; para os atributos

múltiplo de 15, *múltiplo de* 3 *e de* 5,

no conjunto $\mathbb{N}$; etc.

Só depois de exemplos como estes, em linguagem comum, convirá talvez considerar atributos traduzidos por expressões com variáveis e introduzir então o símbolo $\{ x : \}$. ***Para estimular o***

brio dos alunos, convém dizer-lhes que o emprego correcto deste e de outros símbolos de lógica já é familiar a garotos de 7 anos, nos Estados Unidos, segundo o projecto do Prof. Suppes.

3. O estudo anterior de equações e inequações pode agora ser encarado sob o ponto de vista da extensão. Por exemplo, a equivalência de equações

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)\ (x + 2) = 0,$$

traduz-se na identidade de conjuntos

$$\{x : x^2 - x - 6 = 0\} = \{x : (x - 3)\ (x + 2) = 0\}$$

Por sua vez a equivalência

$$(x - 3)\ (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

traduz-se na identidade

$$\{x : (x - 3)\ (x + 2) = 0\} = \{-2,\ 3\}$$

Analogamente a equivalência

$$x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$$

traduz-se na identidade

$$\{x : x^2 - x - 6 < 0\} = \{x : -2 < x < 3\}\ ,\ \text{etc.}$$

4. É agora o momento de esclarecer os conceitos de 'conjunto com um só elemento' e de 'conjunto vazio'. Só assim poderemos dizer que, a cada atributo, num dado universo, corresponde um conjunto definido por esse atributo. Importa notar que, segundo o projecto Suppes, o conceito de conjunto vazio é introduzido sem a mínima dificuldade aos 6 anos, logo na 6.ª lição. O objectivo principal, neste caso, é dar mais tarde o conceito de *número zero* a partir do de *conjunto vazio.* Note-se que o conceito de zero é mais abstracto que o de conjunto vazio.

5. A implicação entre atributos traduz-se na inclusão entre conjuntos. Por exemplo, a proposição

'Ser peixe implica ter vértebras'

traduz-se, extensivamente, na proposição

'O conjunto dos peixes está contido no conjunto dos vertebrados'.

A proposição

'Ser múltiplo de 6 implica ser múltiplo de 3'

traduz-se por

'O conjunto dos múltiplos de 6 está contido no conjunto dos múltiplos de 3'.

Só depois de exemplos como estes, em linguagem comum, convirá passar à linguagem simbólica. Note-se que, uma vez introduzido o símbolo $\subset$, o 2.º exemplo anterior pode ser apresentado com o seguinte aspecto:

A implicação (1)

$$n \text{ é múltiplo de } 6 \Rightarrow n \text{ é múltiplo de } 3$$

traduz-se na inclusão

$$\{n : n \text{ é múltiplo de } 6\} \subset \{n : n \text{ é múltiplo de } 3\}$$

Quanto ao 1.º exemplo, se designarmos por P o conjunto dos peixes e por V o conjunto das vértebras, podemos dizer:

A implicação $x \in P \Rightarrow x \in V$ traduz-se na inclusão $P \subset V$ (aliás no *Compêndio* parte-se dum exemplo análogo).

Devem seguir-se exemplos com equações e inequações. Assim tem-se:

EM TERMOS DE COMPREENSÃO	EM TERMOS DE EXTENSÃO
$x = 3 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$	$\{x : x = 3\} \subset \{x : x^2 - 9 = 0\}$
$x > 3 \Rightarrow x^2 - 9 > 0$	$\{x : x > 3\} \subset \{x : x^2 - 9 > 0\}$
$2 + \sqrt{x} = x \Rightarrow x^2 + 4 < 5x$	$\{x : 2 + \sqrt{x} = x\} \subset \{x : x^2 + 4 < 5x\}$
$\sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Rightarrow 2x = 0$	$\{x : \sqrt{x^2 + 1} = x - 1\} \subset \{x : 2x = 0\}$

Convirá sempre verificar se a inclusão inversa também se verifica. Deve também avisar-se o aluno de que muitos autores usam o sinal $\subset$ apenas para *inclusão estrita*, adoptando o sinal $\subseteq$ (por analogia com o sinal $\leqslant$) para *inclusão lata*. Segue-se porém aqui o critério de muitos outros autores, que adoptam o sinal $\subset$ para inclusão lata, podendo usar-se o sinal $\underset{\neq}{\subset}$ para inclusão estrita.

---

(1) Importa salientar que se trata de implicação formal e pôr, a princípio, um ponto ou a variável sob o sinal de implicação.

6. O último exemplo anterior poderá servir de pretexto para notar que a proposição:

'Uma condição impossível implica qualquer outra condição' se traduz, em termos de extensão, na proposição:

'O conjunto vazio está contido em qualquer outro conjunto'.

Porém, ao contrário do que se faz no Compêndio, *será talvez preferível reservar para depois das operações sobre conjuntos o estudo sistemático das propriedades da inclusão, relacionadas aliás com as propriedades dessas operações.*

O que convirá, desde já, é introduzir a terminologia e as notações relativas a intervalos em $\mathbb{R}$*, pela comodidade que oferecem no estudo de inequações e em exemplos vários.*

7. Já se viu que, na passagem da compreensão para a extensão, *implicação* se transforma em *inclusão* e *equivalência* em *identidade*.

Agora chegou o momento de mostrar, com exemplos bem escolhidos, que as operações de conjunção, disjunção e negação sobre atributos, se convertem, respectivamente, nas operações de intersecção, reunião e complementação sobre conjuntos. Tal como para a equivalência e para a implicação, os primeiros exemplos deverão talvez ser apresentados em linguagem comum. Sejam os dois atributos

estudante, menor de 18 *anos*

(que poderemos designar abreviadamente pelas letras *e, m*) considerados no universo dos portugueses. A sua conjunção é o atributo

estudante menor de 18 *anos*

(ou abreviadamente $e \wedge m$). Designemos por E o conjunto dos estudantes e por M o conjunto dos menores de 18 anos (no referido universo). Como se forma a partir destes o conjunto dos *estudantes menores de* 18 *anos?* O próprio aluno deverá fornecer a resposta, sendo aconselhado para isso a utilizar um diagrama. Surge deste modo o conceito de intersecção dos dois conjuntos, que se representa por $E \cap M$.

Assim, a *conjunção* $e \wedge m$ converte-se na *intersecção* $E \cap M$. Utilizando variáveis, tem-se por definição

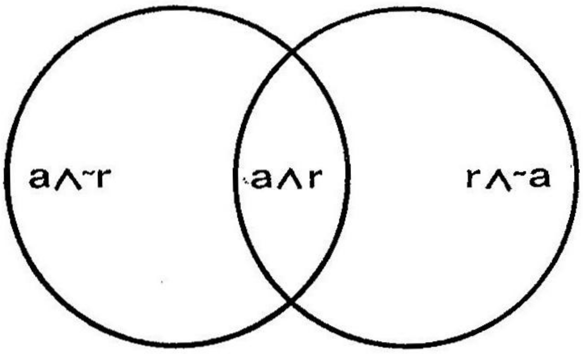
$$x \in E \cap M \Leftrightarrow x \in E \wedge x \in M$$

Os exemplos apresentados no *Compêndio* são todos importantes.

Orientação análoga será seguida para a reunião e para a complementação. Os exemplos do Capítulo VII, n.º 1 (págs. 197-198, 2.º tomo) poderão, desde já, ser utilizados completamente.

Note-se que *'atributos incompatíveis'* se traduz, em termos de extensão, por *'conjuntos disjuntos'*.

8. Será interessante informar os alunos de que, segundo o *projecto Dienes*, estas noções estão já a ser introduzidas de modo intuitivo no *ensino pré-primário*. Para isso é adoptado o método dos BLOCOS DE ATRIBUTOS imaginado pelo Prof. Dienes e que se baseia em jogos com uma colecção de objectos de várias formas (círculos, quadrados, rectângulos e triângulos), várias cores (azuis, vermelhos e amarelos), dois tamanhos (grandes e pequenos) e duas espessuras (grossos e delgados). Por exemplo, para focar os conceitos de conjunção e intersecção, o professor pode colocar sobre uma mesa ou no chão duas cintas a cruzarem-se e convidar os garotos a colocarem num dos círculos todos os objectos azuis da colecção e só esses (independentemente da forma, tamanho e espessura) e no outro círculo todos os objectos redondos e só esses (independentemente da cor, tamanho e espessura). Há-de chegar um momento em que os alunos hesitam perante os objectos que são *ao mesmo tempo azuis e redondos.* Quando compreenderem o que se pretende, acabarão por colocar esses objectos (e só esses) na região comum aos dois círculos. Deste modo se materializa extensivamente aos seus olhos o conceito de intersecção de dois conjuntos, gerado pelo de conjunção de atributos. Analogamente para outras operações lógicas.



9. As propriedades das operações lógicas sobre conjuntos e de inclusão devem surgir como tradução das propriedades correspondentes das operações sobre atributos, as quais, em última análise, são consequência das propriedades das *operações sobre valores*

lógicos. Também aqui convém acrescentar as PROPRIEDADES DA IDEMPOTÊNCIA para a intersecção e para a reunião:

$$A \cap A = A \quad , \quad A \cup A = A$$

O enunciado do PRINCÍPIO DA DUALIDADE LÓGICA, *dado na pág. 109, 1.º tomo, presta-se a confusões.* Onde está *'Toda a proposição sobre conjuntos'* deveria estar *'Toda a propriedade das operações lógicas sobre conjuntos'*.

10. Só depois do estudo das referidas propriedades, e como aplicação das mesmas, se deve abordar o *estudo dos silogismos em termos de extensão*. Nos silogismos clássicos, em que a conclusão é uma proposição universal, o que intervém fundamentalmente é a *propriedade transitiva da inclusão*

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

ou a própria definição de inclusão:

$$a \in A \wedge A \subset B \Rightarrow a \in B$$

(É indispensável distinguir os dois casos, como se faz no *Compêndio.)*

Mas tem igualmente muito interesse apresentar os silogismos sob forma operatória, para mostrar como o raciocínio *se traduz em cálculo algébrico (no domínio da álgebra de Boole).*

Para isso é mais cómodo representar a intersecção de dois conjuntos A, B pela notação AB, o complementar de A pela notação $\tilde{A}$ e o conjunto vazio pelo símbolo 0 [1]. Observe-se agora que a inclusão se pode definir a partir das operações lógicas. Seja por exemplo R o *conjunto dos rouxinóis* e A o *conjunto das aves.* Temos então

$R \subset A$ (isto é: *Todo o rouxinol é uma ave*).

Mas o mesmo juízo pode ser assim expresso:

$$R\tilde{A} = 0,$$

o que está a indicar que os conjuntos R e $\tilde{A}$ *são disjuntos*, ou seja, em termos de compreensão:

Ser rouxinol e não ser ave é impossível.

---

(1) O símbolo $\varnothing$ (letra O cortada) só interessa para designar o conjunto vazio, quando se pretende evitar a confusão com o número *zero*.

Dum modo geral, quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se

$$A \subset B \Leftrightarrow A\tilde{B} = 0$$

Daqui se deduz, por sua vez, aplicando a LEI DA DUPLA NEGAÇÃO:

$$A \subset \tilde{B} \Leftrightarrow AB = 0$$

Por exemplo, sendo A o conjunto das *aves* e G o conjunto dos *animais com guelras*, tem-se

$A \subset \tilde{G}$ (isto é: *Nenhuma ave tem guelras*)

o que também se pode exprimir, escrevendo

$AG = 0$ (isto é: *Ser ave e ter guelras é impossível*).

Posto isto, seja ainda R o conjunto dos rouxinois, A o conjunto das aves e P o conjunto dos animais com pulmões. O silogismo

$R \subset A$ (Todo o rouxinol é ave)

$\underline{A \subset P}$ (Toda a ave tem pulmões)

$R \subset P$ (Todo o rouxinol tem pulmões)

pode agora ser apresentado com o aspecto:

$$\begin{array}{c} R\tilde{A} = 0 \\ \underline{A\tilde{P} = 0} \\ R\tilde{P} = 0 \end{array}$$

Analisando este esquema, o aluno facilmente nota que se chegou à conclusão *eliminando* entre as premissas os dois factores complementares A, Ã. *Tudo se passa, portanto, como se tivéssemos multiplicado membro a membro as duas premissas, o que dá*

$$R\tilde{A} \cdot A\tilde{P} = 0$$

e tivéssemos depois eliminado os referidos termos complementares, o que conduz à conclusão, $R\tilde{P} = 0$.

Seja ainda R o conjunto dos rouxinóis, A o conjunto das aves e G o conjunto dos animais com guelras. Então o silogismo

$$R \subset A \quad , \quad A \subset \tilde{G} \quad , \quad \therefore \quad R \subset \tilde{G}$$

pode apresentar-se com o aspecto

$$R\tilde{A} = 0 \quad , \quad AG = 0 \quad , \quad \therefore \quad RG = 0,$$

em que a conclusão se pode obter aplicando a mesma regra.

Mas note-se que se trata aqui apenas de uma regra prática *e não da aplicação de uma propriedade operatória que justifique essa eliminação no produto* $R\tilde{A} \cdot AG = 0$.

Seja porém como for, esta regra é na verdade muito prática, podendo aplicar-se a duas ou mais premissas do tipo das anteriores, para delas deduzir uma ou mais conclusões. Sejam por exemplo as seguintes premissas, consideradas por Lewis Carrol:

1) Nenhum indivíduo que aprecie realmente Beethoven pode deixar de manter silêncio absoluto enquanto se toca a *Sonata ao Luar.*
2) As cobaias são desesperadamente incultas a respeito de música.
3) Nenhum indivíduo que seja desesperadamente inculto a respeito de música é capaz de manter silêncio absoluto, enquanto se toca a *Sonata ao Luar.*

Para traduzir estas proposições em linguagem de conjuntos, ponhamos:

B = conjunto dos indivíduos que apreciam realmente Beethoven.
S = conjunto dos que mantêm silêncio absoluto enquanto se toca a *Sonata ao Luar.*
C = conjunto das cobaias.
D = conjunto dos indivíduos que são desesperadamente incultos a respeito de música.

As três proposições anteriores podem traduzir-se assim:

$$1') \quad B \subset S \quad \text{ou seja} \quad B\tilde{S} = 0$$
$$2') \quad C \subset D \quad \text{ou seja} \quad C\tilde{D} = 0$$
$$3') \quad D \subset \tilde{S} \quad \text{ou seja} \quad DS = 0$$

Multiplicando membro a membro estas igualdades, pela ordem 2'), 3'), 1') e aplicando a propriedade comutativa do produto, obtém-se:

$$C\tilde{D} \cdot DS \cdot \tilde{S}B = 0$$

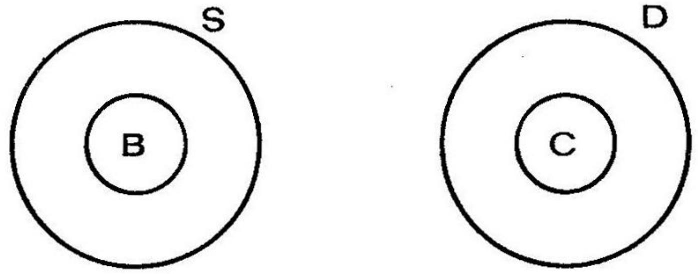
Eliminando os factores complementares, segundo a referida regra prática, vem a conclusão:

$$CB = 0,$$

que se traduz em linguagem comum por:

'Nenhuma cobaia aprecia realmente Beethoven'.

Mas das três premissas ainda se podem tirar as conclusões DB = 0 (Nenhuma pessoa desesperadamente inculta a respeito de música aprecia realmente Beethoven) e CS = 0 (Nenhuma cobaia é capaz de manter silêncio absoluto enquanto se toca a *Sonata ao Luar)*.



Este exemplo, ao mesmo tempo humorístico e educativo, segundo o estilo do autor, pode tornar-se intuitivo com o diagrama.

Um outro exemplo de L. Carrol que convém citar, igualmente humorístico e recreativo, é o dos *fumadores de ópio*, apresentado nas págs. 191-192 do 2.º tomo do *Compêndio*. O próprio aluno poderá chegar por si à conclusão; mas outras conclusões se podem tirar das mesmas premissas. Ver ainda o exercício IX, pág. 194, 2.º tomo.

Os exemplos anteriores mostram o seguinte facto, para o qual convém chamar a atenção do aluno:

Quando se apresentam mais de duas premissas, é possível geralmente tirar delas mais de uma conclusão e começa a ser cada vez menos evidente quais as conclusões que se podem obter.

Ora numa teoria matemática a situação é análoga: a teoria parte normalmente de várias premissas (os *axiomas* ou *postulados*) para chegar a várias conclusões (os *teoremas*), que são cada vez menos evidentes e que o matemático antevê primeiramente *por intuição* e só depois confirma logicamente *por demonstração*. Note-se ainda que muitas das conclusões possíveis são desprovidas de interesse; o mérito do matemático está em distinguir os resultados verdadeiramente interessantes.

11. Os casos anteriores não esgotam de modo nenhum a lista dos silogismos, nem sequer a dos silogismos clássicos em termos de conjuntos. Aliás a lista dos silogismos é interminável. Convirá ainda deter a atenção, *por breve tempo*, em outros tipos de silogismos.

Por exemplo, apresentem-se as premissas

2 é um número par
2 é um número primo

e convide-se o aluno a tirar uma conclusão.

Não será difícil obter a resposta:

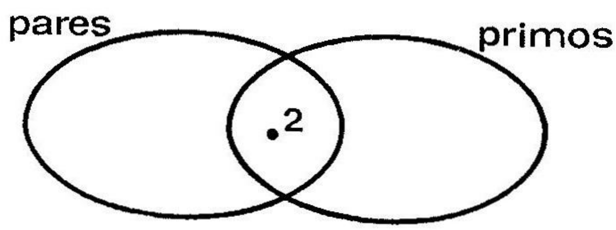
Existe pelo menos um número que é par e primo

ou

Algum número par é primo

ou ainda

Algum número primo é par

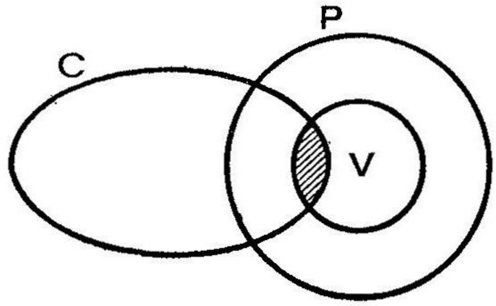


Se designarmos por M_2 o conjunto dos números pares e por Pr o conjunto dos números primos (por exemplo no universo $\mathbb{N}$), o silogismo considerado assume a forma simbólica:

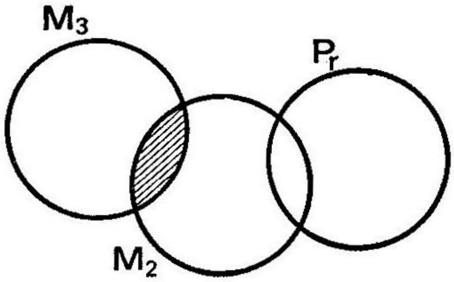
$$\begin{array}{c} 2 \in M_2 \\ 2 \in Pr \\ \hline M_2Pr \neq 0 \end{array}$$

Podem-se depois considerar exemplos tais como:

Alguma destas cobras é uma víbora
Toda a víbora é perigosa
Logo...



Algum número par é múltiplo de 3
Nenhum múltiplo de 3 é primo
Logo...



Convide-se o aluno a interpretar estes exemplos, quer simbolicamente, quer por meio de diagramas.

Convide-se ainda o aluno a ver, por exemplo, onde está o vício de paralogismos tais como:

Algum número par é primo
Algum número par é múltiplo de 3
Logo algum múltiplo de 3 é primo

Algum homem é cosmonauta
Todo o americano é um homem
Logo algum americano é cosmonauta

NOTA IMPORTANTE. I. O emprego da palavra 'algum' no singular, como se faz nestes exemplos, torna a linguagem pouco natural. Seria mais natural dizer 'Alguns homens são cosmonautas'. Mas isso equivaleria a dizer 'Existe mais de um homem que é cosmonauta', o que é aliás verdadeiro (em 1965). Ora o que se pretende dizer é: '*Existe pelo menos um* homem que é cosmonauta'. Isto mostra, por um lado, mais um dos inconvenientes da linguagem comum e, por outro lado, a vantagem do emprego do quantificador 'Existe pelo menos um', em vez do adjectivo indefinido 'Algum'. Por exemplo, as proposições 'Algum número par é primo' e 'Existe pelo menos um número par que é primo' pretendem dizer a mesma coisa; simplesmente, a segunda é muito mais explícita e natural do que a primeira.

Todavia, convém muitas vezes transigir com as irregularidades da linguagem comum e — até mais — habituar o aluno à multi-

plicidade de formas que essa linguagem pode assumir, para que ele fique apto a traduzi-la em termos simbólicos.

O pôr problemas em equação não é senão um primeiro aspecto desse tipo de traduções. Agora o campo alarga-se extraordinariamente e, tendo em vista o incremento que as aplicações da matemática moderna estão a ter, especialmente no domínio da automação, é forçoso preparar nesse sentido as novas gerações. O professor pode ter à sua disposição uma imensa variedade de exemplos — e quanto mais pitorescos estes forem, melhor. Indicaremos, a propósito, o seguinte exemplo extraído do livro do Prof. Suppes, *Introduction to Logic:*

Pondo:

H = conjunto de todas as pessoas

A = conjunto dos americanos

F = conjunto dos franceses

B = conjunto dos bandidos

P = conjunto dos filósofos

V = conjunto das pessoas que bebem vinho

C = conjunto das que bebem café

T = conjunto das que bebem chá

traduza as seguintes proposições em forma simbólica:

a) Alguns americanos que bebem vinho são filósofos.

b) Nenhum francês é americano.

c) Quem bebe vinho e café bebe também chá.

d) Os bandidos franceses bebem café, chá e vinho.

e) Alguns bandidos americanos bebem café e chá, mas não vinho.

f) Alguns bandidos franceses que bebem vinho não bebem ou chá ou café.

g) Um filósofo não bebe chá nem café.

h) Alguns franceses são ou filósofos ou bandidos.

i) Todos os que bebem café bebem chá ou vinho.

Quando se trata de silogismos, os exemplos podem tornar-se ainda mais sugestivos, como já se viu. Acrescentaremos mais dois exemplos do livro *Symbolic Logic*, de L. Carrol:

I. Tirar todas as conclusões possíveis das seguintes hipóteses:

1) Nenhum exercício acrobático, que não esteja anunciado no programa dum circo, é ali executado.
2) Nenhum exercício acrobático é possível, quando envolve um quádruplo salto mortal.
3) Nenhum exercício acrobático impossível é anunciado no programa dum circo.

(Pôr U = { exercícios acrobáticos }, a = { exercícios acrobáticos anunciados nos programas dum circo }, b = { exercícios acrobáticos executados num circo }, c = { exercícios acrobáticos que implicam um quádruplo salto mortal }, d = { exercícios acrobáticos possíveis }.)

II. Tirar todas as conclusões possíveis das seguintes hipóteses:

1) Quando trabalho num exemplo de lógica sem resmungar, estejam certos de que posso compreendê-lo.
2) Estes sorites não estão dispostos em ordem regular como os exemplos a que estou habituado.
3) Nenhum exemplo fácil me faz dor de cabeça.
4) Não sou capaz de entender um exemplo que não esteja disposto em ordem regular, como aqueles a que estou habituado.
5) Eu nunca resmungo com um exemplo, a não ser quando me faz dor de cabeça.

U = { exemplos de lógica em que trabalho }, a = { exemplos de lógica dispostos em ordem regular }, b = { exemplos fáceis de lógica }, c = { exemplos de lógica com que resmungo }, d = { exemplos de lógica que me fazem dor de cabeça }, e = { estes sorites }, f = { exemplos de lógica que sou capaz de entender }.

Ao ver estes e outros exemplos o professor pensa logo no problema do tempo. A maior parte dos exemplos como estes não são para desenvolver na aula. *O professor pode distribuir os enunciados em folhas a ciclostilo, e dizer aos alunos que são* *para os verem em casa se tiverem tempo para isso e se acharem que podem assim divertir-se, do mesmo modo que as crianças pequenas se divertem com* jogos de paciência.

Os alunos devem saber que muitas das grandes descobertas científicas, como a do dínamo, a da teoria da relatividade, a da penicilina, etc., etc. são devidas a pessoas que se divertiram *assim com as suas experiências e as suas meditações.*

10. O assunto da rubrica '*Intersecção ou reunião dos conjuntos duma dada família*' (n.º 13 do Capítulo II, págs. 111-113, 1.º tomo) pode ser adiado para o 7.º ano quando se tratar do conceito de 'partição dum conjunto' associado ao de 'relação de equivalência'.

11. No estudo introdutório das relações, que se faz na parte final deste capítulo, será talvez preferível, do ponto de vista didáctico, adoptar a seguinte ordem, relativamente aos números em que são expostos estes assuntos:

14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 16, 17

Trata-se, pois, de passar para o fim o estudo do produto anterior de *mais de dois conjuntos* e, portanto, o das relações com mais de dois termos.

Este assunto deverá ser feito com todo o cuidado. Um modo natural de o iniciar pode ser o seguinte:

Já vimos que as expressões proposicionais com variáveis exprimem propriedades (ou atributos). Mas há uma diferença notável entre o caso das expressões com uma só variável, tais como:

n *é múltiplo de* 5 , k *é primo*

$3 < x < 5$, X *é estudioso* , X *tem filhos*, etc.

e o caso das expressões com mais de uma variável, tais como:

a *é múltiplo de* b , m *é primo com* n

$a < x < b$, X *estuda mais que* Y , X *é par de* Y, etc.

As primeiras aplicam-se, de cada vez, a *um só indivíduo*, e podemos, por isso, dizer que exprimem *propriedades absolutas*.

As segundas aplicam-se, de cada vez, a *dois ou mais indivíduos considerados numa certa ordem.* Diremos então que essas expressões traduzem *propriedades relativas.*

Assim, as propriedades 'ser múltiplo de 5', 'ser número primo', etc. são propriedades absolutas, enquanto as propriedades 'ser múltiplo de', 'ser primo com', etc. são propriedades relativas.

Ora já sabemos que, na passagem da compreensão para a extensão, as *propriedades absolutas* dão lugar a *conjuntos.* A que dão lugar então as *propriedades relativas?* Podemos dizer desde já que dão lugar a *relações.* Mas, por enquanto, apenas se introduziu uma palavra, cujo significado é ainda vago. Procurando precisar o significado da palavra 'relação' — no caso das expressões com *duas* variáveis — chega-se aos conceitos de 'par ordenado' e de 'produto cartesiano', tais como se apresentam nos n.os 14 e 15.

Assim, estes conceitos surgem inevitavelmente, quando se procura interpretar as propriedades relativas em termos de extensão. Também, como se vê, é inevitável fazer aqui apelo ao conceito intuitivo de ordem. *Este é inerente à própria estrutura da linguagem (e portanto do pensamento), exactamente como os conceitos de indivíduo e de classe. Na verdade, é impossível falar ou escrever, sem que os sons ou os sinais gráficos se disponham segundo uma ordem determinada:* ordem temporal, *no primeiro caso;* ordem espacial, *no segundo caso.*

Certos autores reduzem os conceitos de par ordenado, de termo ordenado, etc. aos de conjuntos de diferentes tipos lógicos, mediante um artifício. Por exemplo, põem por definição:

$$(5,\ 3) = \{\{5,\ 3\}\ ,\ 5\}\ ,\quad (5,\ 5) = \{\{5\}\ ,\ 5\},\ \text{etc.}$$

A nosso ver, porém, trata-se de um artifício pouco intuitivo e desnecessário, especialmente nesta fase do ensino.

NOTA SOBRE A TERMINOLOGIA. Em vez de 'gráfico duma relação', no caso geral, parece-nos preferível dizer 'diagrama duma relação'. Quando se tratar de relações em $\mathbb{R}$, a expressão 'gráfico duma relação' será usada especificamente para designar a sua imagem geométrica, segundo o método da geometria analítica, como se verá adiante.

III

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA

(ASSUNTO NÃO TRATADO NO *COMPÊNDIO*)

1. A iniciação à geometria analítica deverá fazer-se bastante cedo, até para dar um bom suporte intuitivo à noção de produto cartesiano (haja em vista a origem da palavra 'cartesiano') e, em especial, às relações entre números reais.

Tal iniciação deverá ser tanto quanto possível elementar. *Não nos parece oportuno utilizar, desde já, o cálculo vectorial* (1). O conceito de vector é um instrumento algo elaborado, que dificulta a aplicação do método heurístico.

2. Para evitar um hiato entre os Capítulos II e III do *Compêndio*, convirá dedicar três horas semanais ao estudo da geometria analítica e continuar na linha do *Compêndio* nas restantes três horas. Esta bifurcação terminará logo que cesse a introdução à geometria analítica.

3. Para apoio dos alunos, poderá seguir-se o livro adoptado de *Geometria Analítica Plana*.

Os assuntos expostos nos n.^{os} 1, 2 e 3 não oferecem qualquer dificuldade, não só porque o aluno já recebeu uma iniciação intuitiva sobre este método nos anos anteriores, mas ainda porque está agora familiarizado com o conceito de 'par ordenado'. *O professor deverá coordenar o ensino de modo que, neste momento, o aluno já esteja esclarecido sobre o uso da expressão 'correspondência biunívoca', tal como esta aparece no início do Capítulo III.*

No n.º 1 indica-se, em pormenor, como se estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos duma recta r e os

(1) Se este assunto vier a ser introduzido no 2.º ciclo, como aliás é para desejar, é claro que a situação terá de ser revista quanto ao 3.º ciclo.

números reais, ou seja, uma correspondência biunívoca entre o *conjunto* r (de pontos) e o *conjunto* $\mathbb{R}$ (de números). Esta correspondência leva a dizer, por comodidade, 'o ponto 3' em vez de 'o ponto de abcissa 3', 'o ponto 0' em vez de 'o ponto de abcissa 0', etc. Mas é claro que uma coisa é um *ponto* da recta e outra coisa é o *número* que o representa — tanto mais que essa correspondência se pode estabelecer de uma infinidade de maneiras diferentes. Note-se entretanto que, pela referida circunstância, o conjunto $\mathbb{R}$ também é chamado '*recta numérica*' e, nesta ordem de ideias, os números reais podem ser chamados '*pontos*', por extensão de linguagem.

Analogamente, no n.º 2, é indicado como se estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dum plano α e os pares ordenados de números reais, portanto uma correspondência biunívoca entre o conjunto α (de pontos) e o conjunto $\mathbb{R}^2$ (quadrado cartesiano de $\mathbb{R}$, ou seja, o conjunto de todos os pares ordenados de números reais). Tal como no caso anterior, diz-se por comodidade 'o ponto (2, 3)' em vez de 'o ponto de abcissa 2 e ordenada 3', etc. Mas, evidentemente, uma coisa é um ponto do plano e outra coisa é o par ordenado que o representa. No entanto, pela referida circunstância, o conjunto $\mathbb{R}^2$ é chamado 'plano numérico' e então os seus elementos (que são os pares ordenados de números reais) podem ser chamados 'pontos', por extensão de linguagem.

4. É este um momento oportuno para um diálogo importante, relativo *à existência dos entes geométricos no mundo físico*. O diálogo poderá fazer-se noutra ocasião, mais cedo ou mais tarde, com diversas variantes, ao sabor das circunstâncias. Mas é necessário que o assunto seja debatido alguma vez com os alunos, para que estes não fiquem a ter ideias deformadas sobre um dos aspectos fundamentais da matemática: o das suas relações com a natureza.

O diálogo pode começar com a seguinte pergunta dirigida aos alunos:

Afinal o que é um ponto, o que é uma recta, o que é um plano — na verdadeira acepção destes termos?

Na melhor das hipóteses obtém-se a resposta cómoda habitual, aliás de acordo com o que foi lembrado no Capítulo I, n.º 17:

Trata-se aí de termos primitivos, isto é, de termos que não são definidos logicamente a partir de outros.

Mas o professor não deve de modo nenhum contentar-se com esta resposta. Deve sim voltar à carga:

Também os termos 'gato', 'rosa', etc. são termos primitivos, no mesmo sentido, e no entanto todos sabem reconhecer um gato, uma rosa, etc. Ora quem é que já viu um ponto, uma recta ou um plano?

Os alunos terão de admitir que *ninguém* viu tais coisas. Mas há que lembrar-lhes:

Também ninguém viu ou espera ver centauros, sereias ou dragões. Todos sabem que não existem seres vivos com os atributos que esses nomes invocam: trata-se de meras criações da fantasia humana. Pois serão as figuras geométricas, como os centauros e as sereias, nada mais do que produtos da nossa imaginação?

Os alunos hão-de talvez dizer que não se trata bem da mesma coisa. É preciso encorajá-los nesse sentido e observar:

A cada passo chamamos 'pontos', 'segmentos de recta', 'esferas', etc. *a certos entes do mundo físico, tais como: o sinal deixado pela ponta dum lápis sobre o papel, um fio bem esticado, uma bola de bilhar,* etc.

Mas haverá logo quem repare:

Pois sim, mas toda a gente sabe que essas coisas não são pontos, não são segmentos de recta, não são esferas.

Ao que o professor dirá:

Todavia essas coisas seriam pontos, segmentos de recta, esferas, etc. se verificassem determinadas condições, que são os axiomas e as definições da geometria de Euclides.

E perguntará logo em seguida:

Esses objectos do mundo físico não verificam as referidas condições?

Se adoptarmos a lógica bivalente, a resposta só pode ser 'verificam' ou 'não verificam'. O aluno escolhe provavelmente a segunda (a primeira é demasiado vulnerável). Logo:

Se essas coisas não verificam as referidas condições, a geometria é inaplicável ao mundo físico, não é verdade?

Mais uma vez a resposta terá de ser 'sim' ou 'não' e o aluno optará provavelmente pela negativa (a primeira é incompatível com a anterior resposta). Mas o professor deverá pôr novamente os alunos perante a realidade:

No entanto, se medirmos os três ângulos internos dum triângulo, verificamos que a soma dos três é igual a 180°; *se medirmos os três lados dum triângulo rectângulo, verificamos que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos — e assim por diante. A cada passo vemos confirmadas as previsões teóricas da geometria euclidiana, cujas aplicações são fundamentais na ciência e na técnica: os objectos de uso corrente, as máquinas, as pontes, as catedrais, os arranha-céus, os transatlânticos, as viagens aéreas ou cósmicas — tudo isso que o homem concebe e executa com tanto êxito é feito de acordo com as leis da geometria euclidiana. Parece pois que chegamos a uma conclusão absurda, desconcertante:*

A GEOMETRIA É E NÃO É APLICÁVEL AO MUNDO FÍSICO.

Como pode isto ser?

Não será difícil ouvir dos alunos a resposta:

A GEOMETRIA APLICA-SE APROXIMADAMENTE AO MUNDO FÍSICO.

O professor deve então lembrar que, segundo o esquema da lógica bivalente, uma proposição ou é verdadeira ou é falsa: não se admitem proposições *aproximadamente verdadeiras*. Em que ficamos então? A conclusão só pode ser esta:

Quando se trata de aplicar a matemática ao mundo físico, chega um momento em que não podemos cingir-nos mais ao esquema rígido da lógica bivalente; nesse momento, é inevitável substituir o conceito de 'verdadeiro' pelo conceito de 'aproximadamente verdadeiro'.

Tornando ao exemplo anterior, convém ainda lembrar o seguinte:

As medições têm sempre carácter aproximado. Não podemos pois dizer que a soma dos ângulos internos dum triângulo é exactamente *igual a 180°. O que verificamos na prática é o seguinte: quanto mais aquilo a que chamamos 'triângulo'* parece aproximar-se *daquilo que idealizamos com esse nome, mais a soma dos tais ângulos internos se aproxima de 180° — e mesmo* *isso com as limitações próprias do método experimental, como se verá a propósito do cálculo das probabilidades.*

Assim, uma coisa é a matemática pura, *ciência dedutiva rigorosa, baseada na lógica bivalente, outra coisa é a* matemática aplicada, *isto é, a aplicação da primeira à realidade empírica.*

E agora a discussão volta ao ponto de partida.

Afinal em que ficamos: existem ou não existem figuras geométricas no mundo empírico (1) *?*

Uma resposta adequada será a seguinte:

Não existem como as pensamos, mas existem no mesmo sentido em que existem corpos *sólidos, água,* a *cor* de *verde,* etc.; isto é, existem coisas que se aproximam mais ou menos desses entes que idealizamos. O homem inventa palavras para descrever o que observa na natureza, mas esta é *infinitamente complexa e está sempre a mudar, de modo que a nossa linguagem só aproximadamente lhe é aplicável* (2).

Até com o exemplo anterior da palavra 'gato' e da palavra 'rosa' se verifica uma situação análoga. Qualquer de nós — e até o melhor especialista na matéria — poderá um dia encontrar-se perante um animal que *pareça ser e não ser um gato* ou perante uma flor que *pareça ser e não ser uma rosa.* A natureza está sempre a criar novas formas e assim, quer nos debrucemos sobre o passado, quer avancemos para o futuro, estão sempre a surgir-nos surpresas que obrigam a remodelar os nossos conceitos:

'Todo o mundo é composto de mudança,
Tomando sempre novas qualidades'

O diálogo sobre este tema poderia prolongar-se indefinidamente, mas convém suspendê-lo aqui. Talvez no 7.º ano venha a haver oportunidade para esclarecer o conceito de espaço físico no sentido relativista, libertando o espírito do aluno de alguns fantasmas seculares em que anda enredado o ensino. *Mas convém agora incitar vivamente os alunos a lerem a «Nota Histórica» do Capítulo IV*

(1) É claro que se pode pôr mais geralmente a pergunta: 'Existe o mundo empírico, isto é, existe alguma coisa fora de nós, como fazem crer os nossos sentidos — ou é tudo um sonho? Nós pelo menos existimos, segundo Descartes: *Cogito, ergo sum.* E para além de nós? Mas tudo isso transcende o âmbito da matemática e das suas aplicações.

(2) Escusado será dizer que a palavra 'aproximadamente' tem aqui significado indefinível: só a intuição nos pode guiar no seu uso.

(Funções de variável real) do Compêndio de Álgebra *adoptado, sobretudo na parte respeitante a filósofos gregos.*

5. Os n.^os 3, 4 e 5 do livro de *Geometria Analítica Plana* serão omitidos. Quanto ao assunto do n.º 6 (distância entre dois pontos) convém introduzi-lo heuristicamente. Por exemplo, o professor começará por pedir aos alunos que determinem a distância entre dois pontos com a mesma ordenada, *partindo de casos concretos, acompanhados da respectiva representação gráfica:*

(2, 5) e (7, 5) ; (2, −3) e (−5, −3) ; (0 , 0) e (−2, 0), etc.

Convidado um aluno a achar a expressão que dá em geral a distância de dois pontos (x_1, y) e (x_2, y) *com a mesma ordenada,* é provável que ele escreva:

$$x_1 - x_2$$

O professor perguntar-lhe-á então: *'Suponha que x_1 é menor que x_2: está certa a expressão?'* Após uma *breve discussão,* em que podem intervir outros alunos, não é difícil chegar à expressão correcta [1]:

$$|x_1 - x_2|$$

Analogamente para o caso de dois pontos *com a mesma abcissa.*

Passa-se depois ao caso de dois pontos que não tenham a mesma abcissa nem a mesma ordenada, *partindo novamente de exemplos concretos, não limitados ao primeiro quadrante:*

(2, 1) e (6, 6) ; (−2, 5) e (3, −7);
(2, 0) e (0, 3) ; (0, 0) e (2, 3), etc.

Não será deste modo difícil levar a maioria dos alunos a redescobrir (com o mínimo de sugestões) a fórmula que dá a distância no caso geral.

Se mais tarde o professor pedir alguma vez a um aluno em chamada, a dedução dessa fórmula, este deverá proceder, mais ou menos, como vem indicado no livro, omitindo evidentemente o processo heurístico. Não esquecer que o método a seguir na exposição dum assunto já conhecido não é geralmente o mesmo que se adoptou na investigação.

---

(1) Verifica-se uma estranha resistência dos alunos ao emprego do sinal de *módulo*. Pela via aqui indicada será talvez mais fácil obter uma adesão espontânea ao uso desse sinal.

6. Os n.^{os} 7 e 8 do livro poderão ser omitidos e entra-se então no Capítulo II do mesmo livro. A orientação, mais uma vez, deverá ter carácter heurístico, *partindo de exemplos tão simples e sugestivos quanto possível.*

Proponha-se por exemplo a equação

$$x = y \quad \text{(no universo } \mathbb{R}\text{)}$$

Esta representa uma relação binária. Qual? Precisamente a relação =, isto é, a relação de identidade no universo considerado. Convide-se o aluno a indicar exemplos de pares ordenados que verificam a equação, tais como:

$$(2, 2) \quad , \quad (3, 3) \quad , \quad (0, 0) \quad , \quad (-1, -1) \quad , \quad \left(\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{2}{3}\right),$$
$$(\sqrt{2} \quad , \quad \sqrt{2}) \quad , \quad (-\sqrt{2} \quad , \quad -\sqrt{2}) \quad , \quad \text{etc.}$$

e a representar geometricamente estes pares, uma vez fixado um referencial cartesiano. O aluno observa então que os pontos marcados pertencem todos a uma recta: *a bissectriz dos quadrantes ímpares*. Surgem assim três perguntas:

1) Quantos pares (x, y) verificam a equação $x = y$?
2) Todos os pontos da recta indicada correspondem a soluções dessa equação?
3) Todas as soluções da equação $x = y$ correspondem a pontos dessa recta?

O aluno observará que um ponto com coordenadas x, y iguais (portanto do mesmo sinal) só pode estar no 1.º quadrante ou no 3.º quadrante (ou em ambos). Por outro lado, se $x = y$, também $|x| = |y|$, quer dizer: esse ponto é *equidistante* dos eixos coordenados. Ora o aluno sabe que o *lugar geométrico* dos pontos do 1.º quadrante equidistantes dos eixos (isto é, o *conjunto* de todos os pontos do 1.º quadrante equidistantes dos eixos) é a bissectriz desse quadrante. Analogamente para o 3.º quadrante. Conclusão: *O conjunto de todos os pontos do plano, que representam soluções da equação* $x = y$, *é exactamente a recta bissectriz dos quadrantes ímpares.* É natural então dizer que esta recta é a *imagem geométrica* (ou o *gráfico*) da equação $x = y$ ou de qualquer outra equação que lhe seja equivalente, como por exemplo

$$x - y = 0 \quad , \quad y - x = 0 \quad , \quad \text{etc.}$$

Também diremos que essa recta – a bissectriz dos quadrantes ímpares – é a *imagem geométrica* (ou o *gráfico*) *da relação* =.

Um segundo exemplo poderá ser a equação

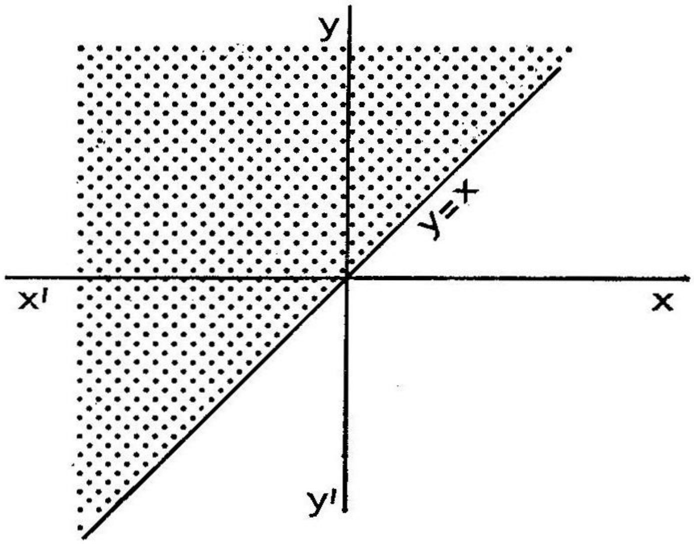
$$y = -x \quad (\text{equivalente a } x = -y\ ,\ \text{a } x + y = 0, \text{ etc.})$$

que tem por gráfico a bissectriz dos quadrantes pares (trata-se agora da relação 'é simétrico de').

Mas nem todas as relações são representáveis por equações. Seja por exemplo a condição:

$$x \leqslant y$$

Quais os pontos representativos dos pares (x, y) que verificam



esta condição? São aqueles cuja abcissa, x, é inferior ou igual à sua ordenada, y. Uma vez marcados alguns desses pontos, a partir de exemplos numéricos, o aluno facilmente reconhece que o conjunto dos referidos pontos é o semiplano superior determinado pela bissectriz dos quadrantes ímpares. Este semiplano será pois a *imagem geométrica* (ou o *gráfico*) da condição $x \leqslant y$ ou de qualquer outra equivalente, por exemplo $y \leqslant x$, $x - y \leqslant 0$, etc. Também se dirá que é a *imagem geométrica* (ou *o gráfico*) *da relação* $\leqslant$.

Seja agora a condição

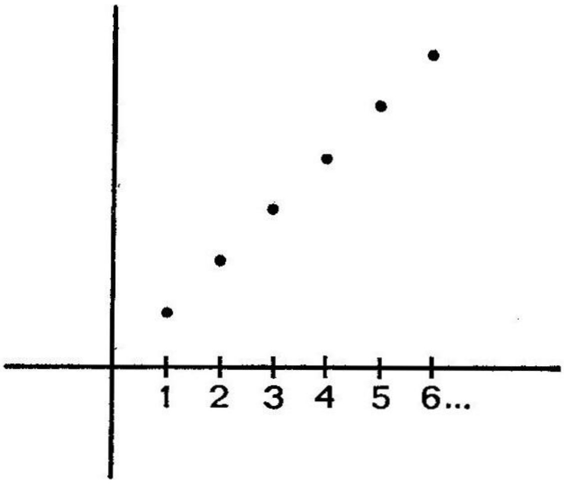
$$x < y$$

O gráfico desta não coincide com o da anterior ($x < y$ não é equivalente a $x \leqslant y$). O gráfico é agora o semiplano anterior *menos* a bissectriz dos quadrantes ímpares. Diremos pois também que é este o gráfico da relação $<$.

Consideremos ainda a condição

$$x = y \wedge x \in \mathbb{N}$$

(que define a restrição da relação = ao conjunto $\mathbb{N}$). Neste caso, o estudo anterior permite facilmente reconhecer que o gráfico é um conjunto *discreto* de pontos (isto é, de pontos *separados* entre si), constituído pelos pontos da bissectriz dos quadrantes ímpares, cuja abcissa é um número natural (isto é, inteiro e positivo). Mas o gráfico é ainda neste caso um conjunto *infinito* de pontos.



Sejam agora as equações:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = -1$$

A primeira tem *uma só* solução: o par (0, 0). O seu gráfico é um conjunto *com um só* ponto: a origem.

A segunda é *impossível:* o seu gráfico é portanto o *conjunto vazio.*

Por sua vez a condição $x + y = y + x$ é *universal:* o seu gráfico é o *plano inteiro.*

Estes exemplos já permitem formular uma síntese:

Cada relação binária ρ *entre números reais é, por definição, um subconjunto de* $\mathbb{R}^2$*, isto é, um conjunto de pares ordenados de números reais. Desde que se estabelece uma correspondência biunívoca entre estes pares e os pontos do plano, fica estabelecida, automaticamente, uma correspondência biunívoca entre as referidas* relações binárias *e os* conjuntos de pontos do plano. *Cada um destes conjuntos será chamado* imagem geométrica *(ou* gráfico) *da relação correspondente ou de qualquer das condições equivalentes que definem essa relação.*

Quanto à designação tradicional '*lugar geométrico*', ela equivale, como se diz no livro, à designação moderna '*conjunto de pontos*'. Como ainda não caiu inteiramente em desuso, convém que o aluno também a registe.

7. Os exemplos dos n.os 10 e 11 do livro podem ser indicados ao aluno para leitura em casa, mas não interessa estudá-los em

pormenor. Pelo contrário, a experiência mostra a necessidade de esclarecer detidamente certos casos que, embora extremamente simples, encontram dificuldade de compreensão por parte dos alunos. Tais são os casos de condições com uma só variável.

Seja por exemplo a equação

$$x = 2 \quad (\text{no universo } \mathbb{R})$$

Trata-se duma condição com duas variáveis?

O aluno dirá provavelmente 'não'.

No entanto há condições com duas variáveis que lhe são equivalentes. Por exemplo?

Não será talvez difícil obter dos alunos a indicação de exemplos tais como:

$$x + 0 \cdot y = 2 \quad , \quad x = 2 \wedge y \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{etc.}$$

Quais são os pares ordenados que as verificam?

Todos aqueles em que o primeiro elemento, x, é 2, e o segundo elemento, y, é *qualquer número real*. Marcando alguns pontos representativos destes pares, o aluno imediatamente reconhece que o gráfico de tais condições é a *recta paralela ao eixo das ordenadas, de abcissa* 2. E, como

$$x = 2 \Leftrightarrow x + 0 \cdot y = 2 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y \in \mathbb{R},$$

é natural dizer que a equação $x = 2$ ou qualquer outra equivalente (por exemplo $x - 2 = 0$) tem por gráfico, *no plano*, a referida recta.

Devem seguir-se exemplos análogos, tais como

$$x = -3 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 5, \quad y = \sqrt{2} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad \text{etc.}$$

Há toda a conveniência em passar depois a condições tais como

$$x < 5 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad y \leqslant \frac{2}{3} \quad , \quad -2 \leqslant x \leqslant 5 \quad , \quad \text{etc.}$$

8. O assunto exposto no n.º 13 tem de ser agora tratado com maior amplitude, sob o título:

> *'Dedução de equações ou de condições de outro tipo qualquer para conjuntos de pontos que sejam dados geometricamente'*

ou, mais sucintamente:

'Definir analiticamente conjuntos de pontos que sejam dados geometricamente'

Convém começar por um exemplo como o seguinte:

Achar uma equação de circunferência de centro (5, – 2) *e de raio* 4.

Por definição, a referida circunferência é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto (5, – 2), isto é, de todos os pontos (x, y) que verificam a *condição:*

A distância do ponto (x, y) *ao ponto* (5, – 2) *é* 4.

Ora, segundo a fórmula da distância, esta propriedade é traduzida algebricamente pela equação

$$\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}=4,$$

equivalente a

$$(x-5)^2+(y+2)^2=16$$

Qualquer destas será pois *uma* equação da circunferência em questão. Esta será por sua vez a imagem geométrica dessas equações ou da relação definida pelas mesmas:

$$\{(x, y) : (x-5)^2+(y+2)^2=16\}$$

Convém depois aproveitar este exemplo, para passar logo ao seguinte:

Definir analiticamente o círculo de centro (5, – 2) *e de raio* 4.

Por definição, este círculo é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto (5, – 2) é *inferior ou igual* a 4. Chega-se deste modo à condição

$$(x-5)^2+(y+2)^2 \leqslant 16,$$

que define analiticamente o círculo em questão.

Devem seguir-se exemplos análogos:

Circunferência de centro (0, 2) *e raio* 3.
Circunferência de centro (0, 0) *e raio* $\sqrt{2}$.
Círculo de centro (0, 0) *e raio* 1.
Interior do círculo de centro (2, 0) *e raio* 1.

Convém, é claro, aconselhar os alunos a desenhar as figuras consideradas, quando possível.

Poderá depois passar-se ao exemplo IV do livro, mas não convirá ir por enquanto mais longe.

9. O assunto dos n.os 15 e 16 do livro poderá agora ser tratado com muito maior facilidade e deixam de ser necessárias as considerações introdutivas.

Comecemos pela condição

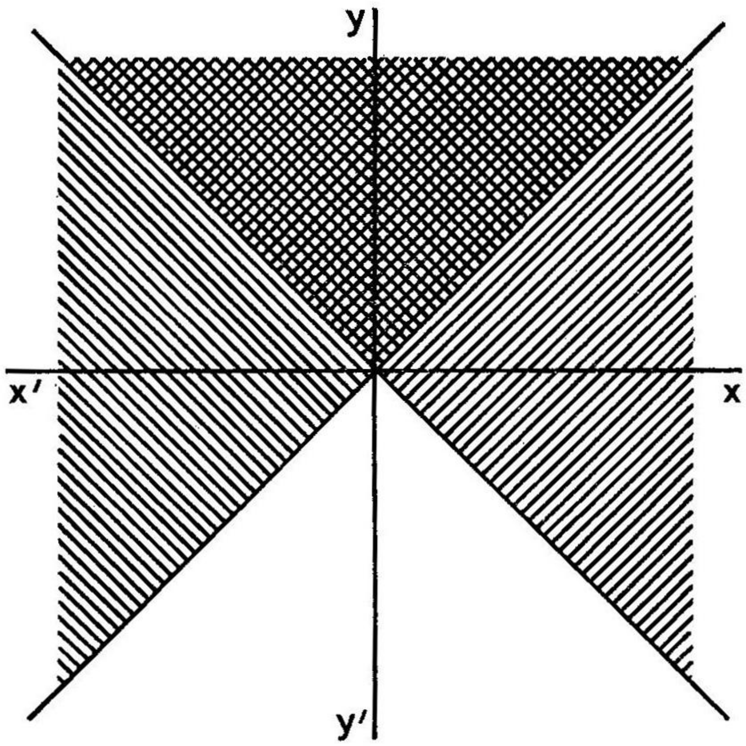
(1) $$x - y \leqslant 0 \wedge x + y \geqslant 0,$$

que pode também ser apresentada sob a forma de sistema:

(1′) $$\begin{cases} x - y \leqslant 0 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}$$

Trata-se pois da conjunção das condições $x - y \leqslant 0$ e $x + y \geqslant 0$. A primeira, como já se viu atrás, tem por gráfico o semiplano superior determinado pela bissectriz dos quadrantes ímpares. A segunda tem por gráfico o semiplano superior determinado pela bissectriz dos quadrantes pares.

Ora o conjunto dos pares (x, y) que verificam a condição (1) é a *intersecção* dos conjuntos dos pares que verificam as condições $x - y \leqslant 0$ e $x + y \geqslant 0$.



Nestas circunstâncias, não é difícil ao aluno chegar por si à conclusão de que o gráfico da condição (1) é a *intersecção* dos dois referidos semiplanos, ou seja o *ângulo convexo* indicado na figura a duplo tracejado (no desenho, é aconselhável usar giz ou lápis de cores diferentes para os dois semiplanos).

Convém considerar logo em seguida a condição

(2) $$x - y \leqslant 0 > x + y \geqslant 0$$

O aluno não terá dificuldade nenhuma em reconhecer que o gráfico desta condição é a *reunião* dos dois semiplanos considerados, ou seja o *ângulo côncavo* indicado a tracejado simples ou duplo. Será também interessante observar que a condição (2) é equivalente à negação da seguinte:

(3) $$x - y > 0 \wedge x + y < 0,$$

cujo gráfico é o *interior* do ângulo convexo não tracejado *(complementar* do gráfico anterior).

Deve seguir-se um exemplo como o seguinte:

$$x - y \geqslant 0 \wedge x + y \leqslant 0 \wedge y \geqslant -3$$

Agora o gráfico é a intersecção de três semiplanos, ou seja um *triângulo.*

Dum modo geral diz-se que um conjunto $\mathfrak{A}$ *de pontos é* convexo *sse, quaisquer que sejam os pontos* P, Q *de* $\mathfrak{A}$, *o segmento de recta* $\overline{PQ}$ *está contido em* $\mathfrak{A}$.

Um plano, um semiplano, um ângulo convexo, um triângulo, um trapézio, um círculo, um sector circular, etc. são conjuntos convexos. Mas já um ângulo côncavo, uma circunferência, uma coroa circular, etc. não são conjuntos convexos. Os conjuntos convexos (muitas vezes definidos por sistemas de desigualdades) desempenham um papel importante em matemática moderna, pura ou aplicada, nomeadamente em programação linear, *relativa a assuntos económicos.*

Devem agora seguir-se exemplos de condições tais como:

$$x + y = 0 \wedge x - y = 0 \quad , \quad x^2 - y^2 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = 1 \wedge x = y,$$
$$-1 \leqslant x \leqslant 3 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 4 \quad , \quad x^2 - y^2 \leqslant 0$$

o outras que se encontram no livro.

Quanto à condição $x^2 - y^2 \leqslant 0$, note-se que

$$x^2 - y^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - y)\ (x + y) \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant y \\ x \geqslant -y \end{cases} \vee \begin{cases} x \geqslant y \\ x \leqslant -y \end{cases}$$

Vê-se então que o gráfico é a reunião dos dois ângulos verticalmente opostos, superior e inferior, determinados pelas bissectrizes dos quadrantes (conjunto não convexo).

Considerem-se ainda condições tais como

$$x^2 + y^2 \leqslant 1 \wedge y \geqslant 0 \quad , \quad 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9 \quad , \quad \sim (1 < x^2 + y^2 < 9)$$

$$x^2 + y^2 \leqslant 4 \wedge (x - 1)^2 + y^2 \geqslant 1 \quad , \quad x^2 + y^2 \leqslant 9 \wedge x^2 - 1 \geqslant 0 \quad , \text{ etc.}$$

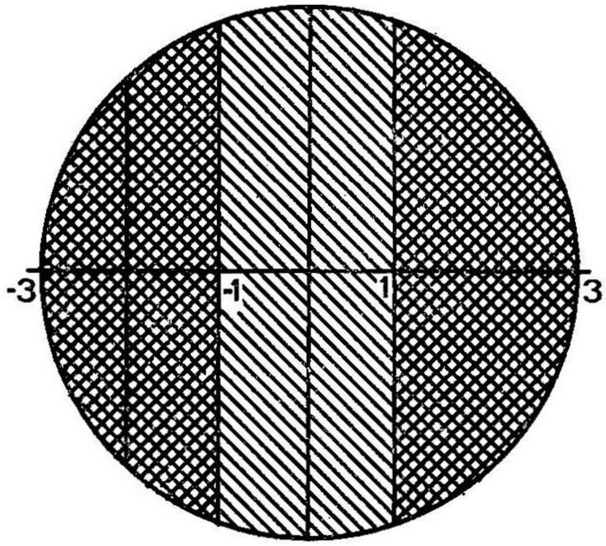
Quanto ao último exemplo, note-se que

$$x^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

donde, aplicando a distributividade da conjunção em relação à disjunção

$$x^2 + y^2 \leqslant 9 \wedge x^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ x \leqslant -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

Facilmente se reconhece que o gráfico é a reunião das duas porções de círculo indicadas a duplo tracejado na figura.



Um caso análogo, que interessa estudar, é o da condição

$$x^2 + y^2 \leqslant 9 \wedge y^2 - 3y \geqslant 0$$

Um outro exemplo curioso e recomendável é o da condição

$$\begin{cases} y = 5 \\ -6 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ 2 \leqslant y \leqslant 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geqslant 4 \\ (x + 2)^2 + (y - 2)^2 \geqslant 4 \end{cases}$$

Para melhor ver o gráfico, depois de feito o desenho, convém apagar os eixos e as linhas auxiliares.

A geometria analítica presta-se admiravelmente para espicaçar a curiosidade, a imaginação e até o sentido estético do aluno. Podem conceber-se os mais variados exemplos, agora e mais tarde.

A título de curiosidade, pode ainda apresentar-se o sistema de desigualdades

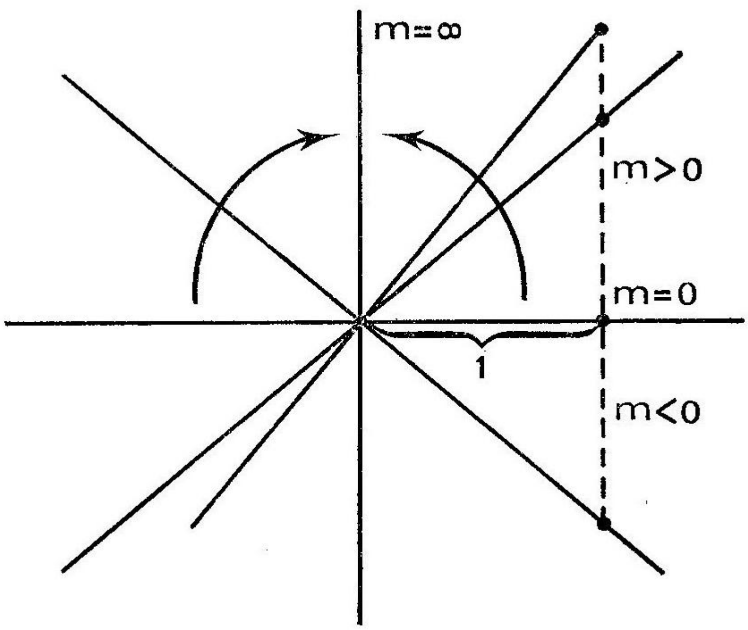
$$\begin{cases} y < \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{4 - x^2} \\ y > \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

Comparando com o exemplo III do n.º 12 do livro (pág. 31) vê-se que o gráfico neste caso é o conjunto dos pontos interiores à linha em forma de coração a que conduz esse exemplo (neste caso não valerá a pena fazer os cálculos e desenhar a curva; bastará observar o que está no livro).

É claro que nem todos estes exercícios terão de ser resolvidos na aula. O professor deverá propor vários como trabalhos de casa, que o aluno fará, ou não, como entender.

9. Passamos agora ao Capítulo III do livro, relativo ao ESTUDO GERAL DA RECTA. É claro que também aqui a orientação terá de ser modificada.

Em primeiro lugar a noção de *declive* deverá ser introduzida como se fez no n.º 25, pág. 57, fórmula (12). *Mas seria um erro didáctico grave introduzi-la secamente, sem considerações de ordem intuitiva que a motivem, estimulando a imaginação do aluno.* Deverá, pois, neste ponto, adoptar-se a orientação do *Compêndio de Álgebra*, no início do Capítulo VIII sobre DERIVADAS, começando com o exemplo bem concreto duma rampa.



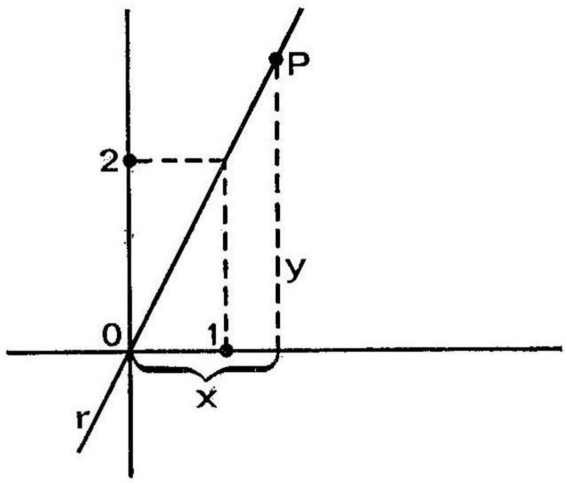
A distinção entre *declive positivo* e *declive negativo* será fundamental (não esquecer os exemplos numéricos!). Deve seguir-se a discussão dos casos-limites: *declive nulo e declive infinito.*

Quanto ao primeiro não há dificuldade. Para o segundo há que recorrer à intuição e é bom que o símbolo ∞ seja introduzido por esta via (mais tarde, na teoria dos limites, o assunto será retomado noutra base). Considerando sucessivas posições duma recta em rotação em torno dum ponto, sendo o declive da recta positivo, o aluno nota que o declive vai aumentando, *tornando-se superior a qualquer número que se dê* (um milhão, um bilião, etc.). É então natural dizer que o declive da recta em movimento tende para $+\infty$. Fazendo, depois, considerações análogas para uma recta de declive negativo, torna-se natural dizer que o declive da recta tende para $-\infty$. Mas, como a posição vertical pode ser atingida tanto de um lado como do outro, convenciona-se dizer que o *declive da recta vertical é* ∞, sem distinção de sinal.

Escusado será dizer que estas considerações deverão ser feitas de modo heurístico, levando o aluno a interpretar por si próprio as situações.

10. Trata-se depois de estudar a equação reduzida duma recta não vertical. Proponha-se ao aluno o problema:

Achar uma equação da recta r *que passa pela origem e tem declive* 2.



O aluno começará por desenhar a figura respectiva. Em seguida deverá considerar um ponto P qualquer da recta, de coordenadas x, y, sendo $x > 0$. Como o declive da recta, determinado a partir dos pontos 0 e P, é $\frac{y}{x}$, deverá ter-se

$$\frac{y}{x} = 2 \quad \text{ou seja} \quad y = 2x$$

A conclusão será a mesma, supondo $x < 0$ (o ponto P está então no 3.º quadrante).

Finalmente, deverá ter-se ainda $y = 2x$ se P coincide com 0, visto ser então $x = y = 0$.

Por conseguinte, podemos escrever:

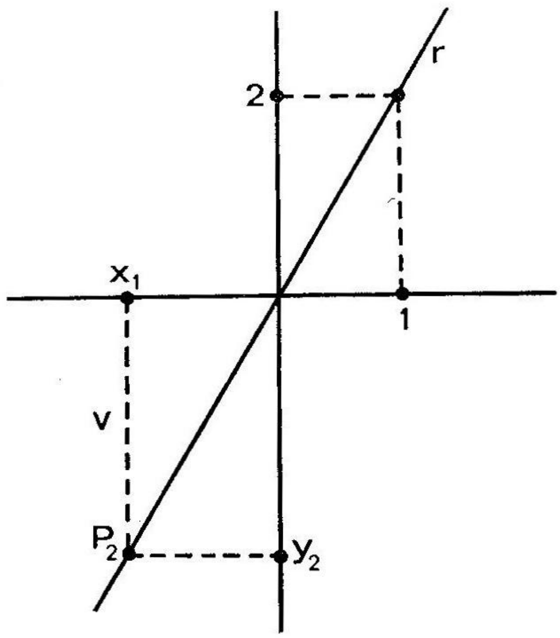
$$P \in r \Rightarrow y = 2x, \tag{1}$$

em que, como se disse, x é abcissa e y a ordenada de P.

Mas basta isto para que a equação $y = 2x$ tenha por gráfico a recta r? Não: é necessário *também que se* verifique a implicação inversa:

$$P \in r \Leftarrow y = 2x \tag{2}$$

É portanto indispensável provar isto!



Seja então (x_1, y_1) *qualquer* par ordenado de números reais tal que $y_1 = 2x_1$ e seja P_1 o ponto correspondente. Trata-se de provar que P_1 pertence a r. Para isso, consideremos a recta vertical v que passa pelo ponto $(x_1, 0)$. Esta intersecta r num ponto P_2 de abcissa x_1 (pergunta-se ao aluno: porquê?). Designemos por y_2 a ordenada de P_2. Como este ponto pertence a r e corresponde ao par (x_1, y_2), teremos, segundo (1),

$$y_2 = 2x_1 \text{ donde } y_2 = y_1 \text{ e portanto } (x_1, y_2) = (x_1, y_1)$$

Mas daqui resulta $P_1 = P_2$ (pergunta-se ao aluno porquê) e, visto que $P_2 \in r$, tem-se $P_1 \in r$, como se queria provar.

Por conseguinte, atendendo a (1) e a (2):

$$P \in r \Leftrightarrow y = 2x$$

Mas isto quer dizer, exactamente, *que a imagem geométrica da equação* $y = 2x$ *é a recta* r.

Devem seguir-se exemplos análogos com rectas de declive negativo $\left(\text{por exemplo } -\frac{2}{3}\right)$ e declive nulo. Deste modo se chega à síntese:

Uma recta não vertical, de declive m, *que passe pela origem, tem por equação:*

$$y = mx$$

Num segundo passo, irá investigar-se o *caso duma recta não vertical que não passe necessariamente pela origem.* Depois de introduzida a expressão 'ordenada duma recta na origem', proponha-se o problema:

Achar uma equação da recta r *cujo declive é* $\frac{1}{2}$ *e cuja ordenada na origem é* 3.

O aluno começará por desenhar a figura correspondente. Em seguida, *motu proprio* ou por sugestão alheia, traçará a recta que passa pela origem e que tem o mesmo declive. Não lhe será então difícil, por considerações mais ou menos semelhantes às do livro, chegar à equação que se pretende:

$$y = \frac{1}{2} x + 3$$

Deve seguir-se o exemplo duma recta cuja ordenada na origem seja negativa. Deste modo se chega à síntese:

Toda a recta não vertical tem uma equação da forma

$$y = mx + b,$$

em que m *é o declive da recta e* b *a ordenada na origem.*

O aluno deverá chegar a estas sínteses como resultados dum processo indutivo, *tal como nas ciências experimentais, indo do particular para o geral. Só depois notará que o raciocínio no* *caso geral é essencialmente o mesmo, bastando substituir os símbolos numéricos por letras. Quanto às figuras, essas terão de corresponder sempre a casos particulares, evidentemente, mas é preciso notar que não intervêm essencialmente nas demonstrações:* o seu papel é apenas o de apoiar a intuição.

Resta ainda provar que a recíproca da proposição anterior é também verdadeira, *como se faz na pág. 50 do livro.*

11. Passando ao n.º 22 do livro, deverá mais uma vez seguir-se o caminho do particular para o geral. Proponha-se por exemplo ao aluno o seguinte problema:

Determinar o gráfico da equação

$$3x - 2y - 5 = 0$$

O aluno é conduzido naturalmente a ver que

$$3x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

e assim reconhece que o gráfico pedido é uma recta não vertical.

Devem seguir-se exemplos de rectas verticais e de rectas horizontais. A síntese a que se pretende chegar é a seguinte:

Toda a equação da forma

$$Ax + By + C = 0,$$

em que A, B, C *são números reais quaisquer, não sendo* A *e* B *simultaneamente nulos, define uma recta. Reciprocamente, toda a recta pode ser definida por uma equação desta forma. A recta será não vertical, sse* $B \neq 0$, *sendo então o declive e a ordenada na origem dados pelas fórmulas:*

$$m = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

12. Saltando o n.º 23, passaremos depois ao n.º 24. Mais uma vez o caminho a seguir deverá ser heurístico, do particular para o geral.

Proponha-se, por exemplo, o problema:

Achar a equação reduzida da recta que passa pelo ponto (3, 4) *e tem declive* 2 *(começando por desenhar a figura).*

A equação pedida será da forma

$$y = 2x + b, \tag{1}$$

em que falta determinar b. Como determiná-lo? Visto que o ponto considerado pertence à recta, *o par ordenado* (3, 4) *é uma solução de* (1). O aluno é levado a reconhecer então que

$$4 = 2 \times 3 + b$$

donde: $b = -2$. A equação pedida será pois: $y = 2x - 2$.

Pode passar-se logo ao caso geral:

Achar a equação reduzida da recta que passa por um ponto dado (x_1, y_1) *e tem declive dado* m.

Todos ou quase todos os alunos *deverão* ser capazes de reproduzir rapidamente os passos anteriores no caso geral:

$$y = mx + b \quad , \quad y_1 = mx_1 + b \quad , \quad b = y_1 - mx_1$$
$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

O aluno será conduzido a notar que esta equação é equivalente à seguinte, de *forma elegante, facilmente memorizável:*

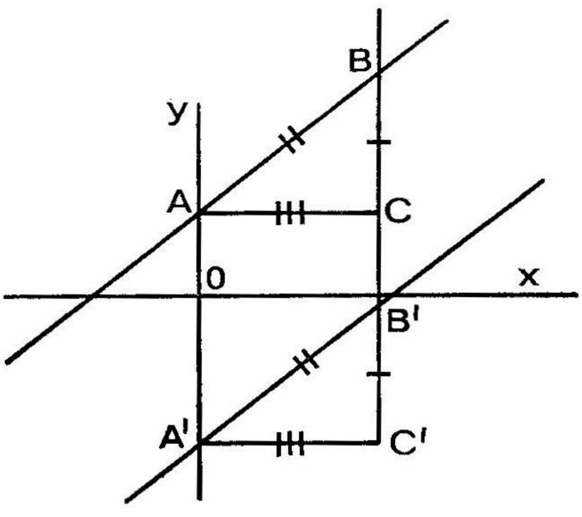
$$y - y_1 = m \ (x - x_1)$$

Podem seguir-se os exemplos I e II do livro.

Quanto à equação da recta que passa por dois pontos (n.º 26), o problema reduz-se ao anterior, depois de achado o declive — e será preferível, mesmo didacticamente, não considerar neste problema o caso geral (isto é, com equações literais).

13. Saltando depois os n.ºs 27, 28 e 29 podemos passar imediatamente aos problemas de intersecção e paralelismo de rectas. Mas será talvez conveniente começar pelos problemas de paralelismo mediante considerações directas de ordem geométrica. Proponha-se aos alunos a seguinte questão:

Se duas rectas são paralelas, que relação deve haver entre os seus declives?



Não é preciso ter uma intuição geométrica excepcional para responder imediatamente: 'são iguais'. O aluno será convidado a fazer a demonstração (1). Pode seguir-se o caminho seguido pela figura (o problema do sinal do declive é mais delicado; há que fazer aí apelo à intuição). Os casos particulares de rectas horizontais ou verticais são imediatamente esclarecidos.

Segue-se a pergunta:

Se duas rectas têm o mesmo declive, que relação deve verificar-se entre as rectas?

Não é difícil obter a resposta. Para a demonstração pode-se utilizar a mesma figura e tomar o comprimento de $\overline{AC}$ para unidade. Ora $|BC| = |B'C'|$, etc. (2).

Síntese:

Duas rectas são paralelas sse têm o mesmo declive.

Note-se que este facto já foi utilizado intuitivamente nas considerações do n.º 10.

Vêm agora a propósito dois tipos de problemas:

I. *Verificar se as rectas seguintes são paralelas:*

$$\begin{array}{rcl}
2x - 3y + 1 = 0 & \text{e} & 6x - 9y = 2; \\
3x - 2y + 1 = 0 & \text{e} & 2x - 3y + 1 = 0; \\
x - 5 = 0 & \text{e} & y + 3 = 0; \\
x + 2 = 0 & \text{e} & x - 2 = 0, \\
 & \text{etc.} &
\end{array}$$

II. *Por um ponto dado conduzir uma paralela a uma recta dada.*

Segundo a orientação anterior, convém começar neste caso por determinar o declive da recta, o que reduz o problema ao tipo considerado no n.º 12.

14. Antes ainda de entrar no estudo da intersecção de rectas, será talvez conveniente tratar de problemas de perpendicularidade, que surgem logo por associação de ideias com os de paralelismo. Ainda neste caso há que seguir o *método geométrico directo.*

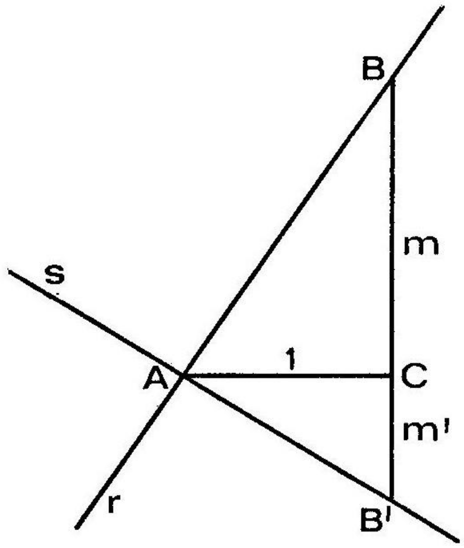
---

(1) Dispensável se a turma estiver atrasada.

(2) Representa-se por $|BC|$ o comprimento de $\overline{BC}$.

O problema que se põe agora é este:

Se duas rectas são perpendiculares, que relação se deve verificar entre os seus declives?



Convidado a representar duas rectas r, s perpendiculares entre si, *não sendo nenhuma delas vertical*, o aluno será levado a recordar o caminho que se segue para determinar geometricamente os respectivos declives, m e m'. É natural que siga um caminho semelhante ao da figura, em que AC é horizontal e BB' vertical. Para maior comodidade, supõe-se o comprimento de $\overline{AC}$ igual à unidade. Então os declives m, m' são dados, respectivamente, pelos comprimentos de $\overline{BC}$ e $\overline{B'C}$. Uma vez reconhecido que o triângulo [ABB'] é rectângulo, é possível que o aluno tenha um *lampejo*, uma *reminiscência* ('A altura referente à hipotenusa é a meia proporcional, etc.'), o que o levará talvez a escrever

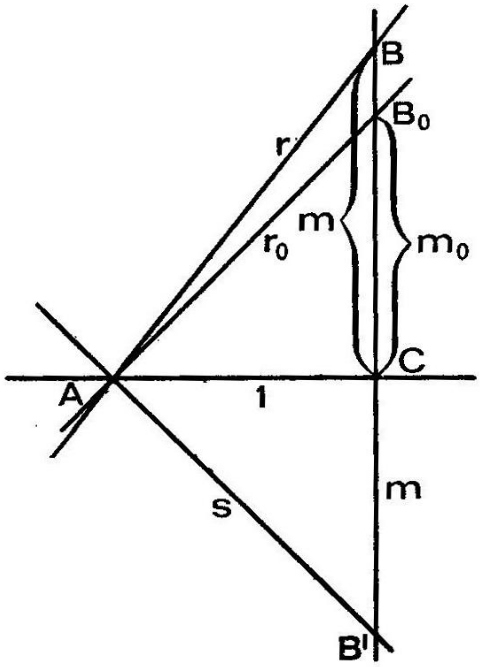
$$1 = mm'$$

É preciso errar para aprender! Os grandes génios erram inúmeras vezes quando tentam descobrir algo de novo... O professor deve lembrar ao aluno que *os declives podem ser positivos ou negativos*. A fórmula correcta surgirá então finalmente:

$$mm' = -1 \quad \text{ou ainda} \quad m' = -\frac{1}{m}$$

Segue-se agora necessariamente a pergunta:

Se esta relação se verifica, as rectas são perpendiculares?



Uma figura semelhante à anterior mostra que a resposta é afirmativa. É claro que *r* não pode ser paralela a *s* (de contrário seria $mm' = m^2 \geqslant 0$). Conduzindo pelo ponto A de intersecção de *r* e *s* uma recta r_0 perpendicular a *s* e designando por B_0 o ponto de intersecção de r_0 com BC e por m_0 o declive de r_0, tem-se, pelo resultado anterior, $m_0m' = -1$. Portanto $m_0 = -1/m' = m$, ou seja $|CB| = |CB_0|$. Daqui resulta, necessariamente, que $B = B_0$, visto que estes pontos estão do mesmo lado em relação a C, na recta BC. Por conseguinte r coincide com r_0 e é *portanto perpendicular a* s (na figura admitiu-se momentaneamente a hipótese $r_0 \neq r$, que a demonstração mostrou ser impossível).

Devem seguir-se exercícios, tais como os da pág. 78 do livro, mas utilizando directamente a fórmula anterior no caso das rectas não horizontais ou verticais. No caso excluído os problemas resolvem-se imediatamente, notando que, se a recta dada é horizontal, a pedida é vertical e *vice-versa.*

15. Pode-se agora abordar o estudo da intersecção de rectas. Mas desde já fique assente o seguinte ponto:

Não convém aqui chegar a fórmulas ou regras cujo emprego, infelizmente, degenera quase sempre na mecanização do aluno, levando-o a ignorar o que mais interessa, que é a dedução dessas regras.

Quanto a princípios de equivalência, pode-se desde já seguir a exposição do Capítulo VI, n.º 15, págs. 118-122 do 2.º tomo, considerando $\mathbb{R}$ no lugar do corpo K.

Devem considerar-se agora unicamente equações numéricas, mas não convém limitar o estudo ao caso de equações lineares (ver o exemplo dado nas referidas páginas).

Quanto a sistemas de equações lineares (duas equações com duas incógnitas), apresentar-se-ão em primeiro lugar exemplos de equações possíveis e determinadas, e convida-se o aluno a interpretar o resultado geometricamente (fazendo pelo menos uma vez a representação gráfica).

Os casos de impossibilidade ou indeterminação devem surgir ao aluno heuristicamente, isto é, o professor deve colocar o aluno inteiramente desprevenido perante a nova situação e tentar que ele se desembarace e se esclareça espontaneamente, até chegar a conclusões correctas. Aliás, o estudo da lógica que se tem estado a fazer irá facilitar bastante a tarefa.

Seja, por exemplo, o sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$$

Pelo método de redução, baseado no *princípio de adição ordenada*, vê-se que o sistema é equivalente ao seguinte:

$$(1') \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 0x + 0y = +1 \end{cases}$$

Existe algum par (x, y) de números reais que verifique a segunda equação?

Vê-se que não existe e porque não existe. Então essa equação *é impossível* e portanto o sistema também o é (a conjunção de uma condição impossível com outra qualquer é sempre uma condição impossível). *Logo o sistema* (1), *sendo equivalente* a (1'), *é impossível.*

A interpretação geométrica deste resultado não oferece qualquer dificuldade:

Dizer que o sistema (1) é impossível equivale a dizer que as rectas de equações $3x - 2y = 1$ e $6x - 4y = 3$ *não têm nenhum ponto comum e são portanto paralelas.*

Neste momento, *impõe-se* desenhar os gráficos das duas rectas. Aliás o aluno pode verificar que as rectas têm o mesmo declive $\left(\frac{3}{2}\right)$, mas não a mesma ordenada na origem, isto é, são *paralelas* e *distintas*, o que confirma a conclusão anterior.

Seja agora o sistema:

$$(2) \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

Procedendo como anteriormente, vê-se que este é equivalente ao seguinte:

$$(2') \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Quais as soluções da 2.ª equação? *Todos os possíveis pares ordenados de números reais.* Trata-se pois de uma *condição universal,* que tem por gráfico o plano inteiro. Mas a conjunção de qualquer condição com uma condição universal é equivalente à primeira. Logo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 2y = 1$$

Portanto o sistema (2) *equivale à equação* $3x - 2y = 1$. Quantas soluções tem esta? Já sabemos: uma infinidade, mas *não todos* os possíveis pares ordenados de números reais (não é uma condição universal). O sistema é portanto *possível,* mas *indeterminado.* Para obter diferentes soluções, basta resolver a equação $3x - 2y = 1$, *por exemplo* em ordem a y:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2},$$

atribuir a x valores arbitrários e determinar os valores correspondentes de y.

Interpretação geométrica:

Dizer que o sistema (2) *é equivalente à equação* $3x - 2y = 1$ *significa que a intersecção das rectas* $3x - 2y = 1$ *e* $6x - 4y = 2$ *é a própria recta* $3x - 2y = 1$, *isto é, significa que as equações* $3x - 2y = 1$ e $6x - 4y = 2$ *representam afinal* a mesma recta.

O aluno pode verificar directamente que as rectas têm o mesmo declive e a mesma ordenada na origem, sendo portanto coincidentes.

Estes e outros exemplos levarão o aluno indutivamente à seguinte conclusão:

Duas rectas de equações

$$Ax + By + C = 0 \quad , \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

são paralelas, sse A' e B' são proporcionais a A e B, isto é, sse existe $k \neq 0$ tal que

$$A' = kA \quad , \quad B' = kB$$

As duas rectas serão *coincidentes* (ou *idênticas*), sse A', B', C' forem proporcionais a A, B, C (a coincidência é um caso particular do paralelismo!).

O professor não deve forçar a conclusão: deve deixá-la formar-se espontaneamente no espírito do aluno.

16. A propósito do assunto anterior, convém introduzir uma noção que irá ser aplicada no número seguinte. Chama-se *forma linear em duas variáveis* x, y toda a expressão do tipo

$$ax + by,$$

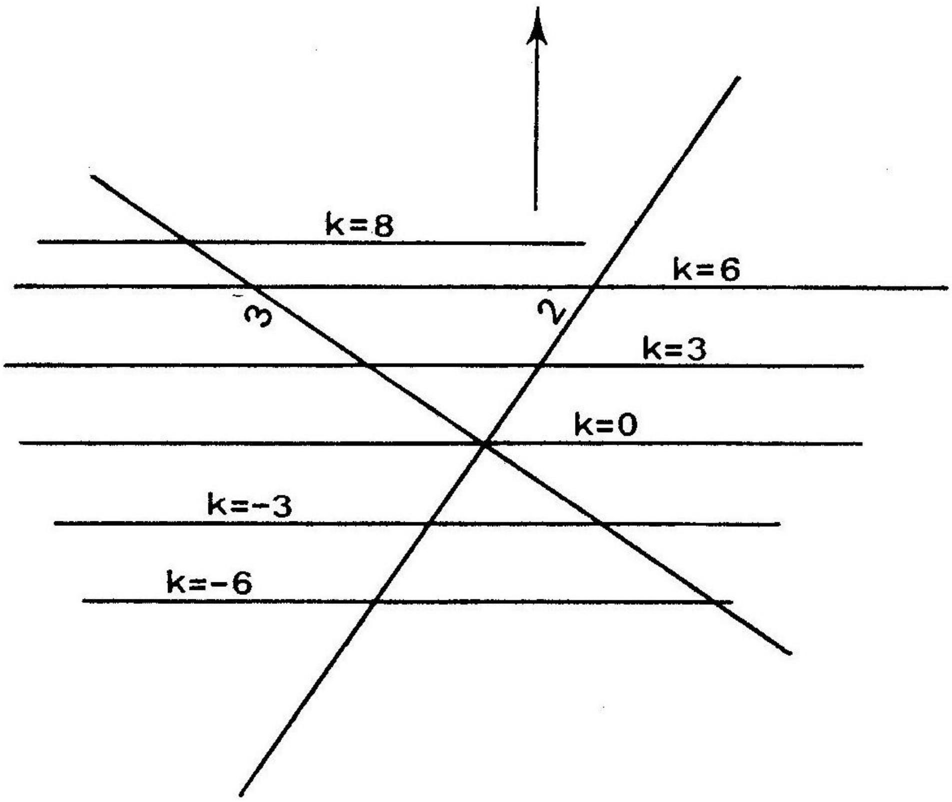
em que a, b são números reais quaisquer. Por sua vez, chama-se *recta de nível* duma forma linear $ax + by$ toda a recta sobre a qual a forma toma um valor *constante*, isto é, toda a recta que tenha uma equação do tipo

$$ax + by = k,$$

sendo k uma constante.

Desde logo se vê que as rectas de nível duma dada forma linear são todas as rectas paralelas a uma qualquer dessas linhas.

Na figura junta são indicadas várias rectas de nível da forma linear 3x + 2y, bem como os valores que a forma toma sobre essas rectas. (Mais uma vez, convirá *começar pelo exemplo* para chegar ao conceito geral de recta de nível.)



Note-se que os valores da forma crescem de baixo para cima ou da esquerda para a direita, conforme indica a seta na figura.

17. O n.º 43 do livro, que vem marcado com um asterisco por não ser obrigatório, é agora, pelo contrário, da *máxima importância*, pelas suas aplicações em problemas de *programação linear.* A programação, linear ou não linear, é um dos tipos de problemas que se apresentam hoje com maior frequência em INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL, no domínio da economia. A sua inclusão no ensino liceal, com carácter elementar, está a tornar-se cada vez mais imperiosa.

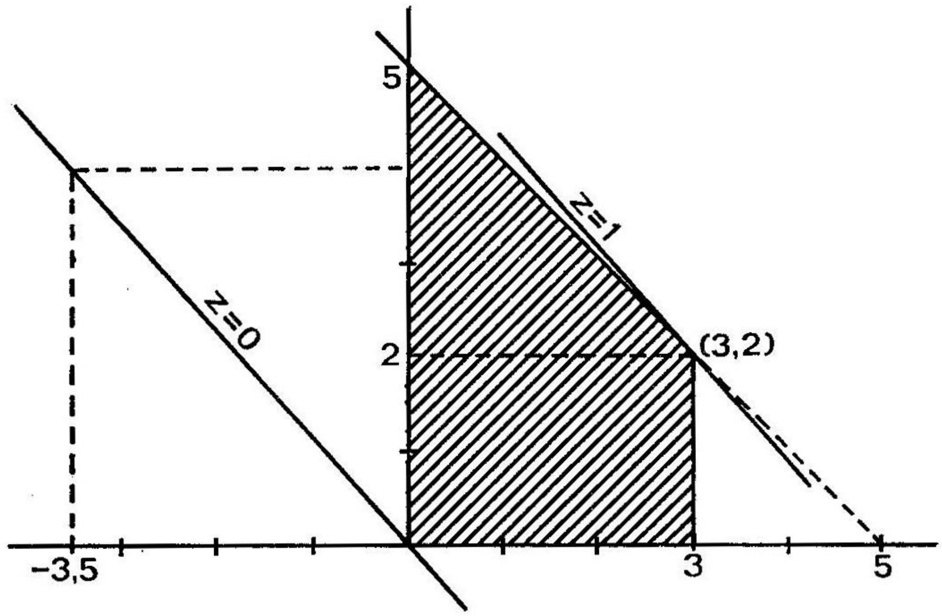
Começaremos por um exemplo de extrema simplicidade:

Suponhamos que um comerciante pretende adquirir uma quantidade, não superior a 5 toneladas, de certo produto que pode ser encomendado a duas fábricas A e B. A fábrica A garante ao comerciante um lucro de 4 contos por tonelada, mas não pode fornecer mais de 3 toneladas desse produto. A fábrica B garante apenas um lucro de 3500 escudos por tonelada, mas pode fornecer toda a quantidade pretendida. Investigar a melhor maneira de o comerciante distribuir as encomendas pelas duas fábricas, de modo a obter o máximo lucro.

Neste caso vê-se logo que a solução óptima consistirá em encomendar 3 toneladas do produto à fábrica A e duas toneladas à fábrica B. Mas convém examinar outras soluções possíveis, a fim de encontrar a solução óptima por um processo que possa aplicar-se a outros casos menos triviais.

Seja x o número de toneladas do produto que o comerciante encomenda à fábrica A e y o número de toneladas que encomenda à fábrica B. Teremos em primeiro lugar as seguintes condições, chamadas *restrições* (ou *condicionamentos*) *do programa:*

(1) $$x + y \leqslant 5 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 3 \quad , \quad y \geqslant 0$$



A conjunção destas três condições tem por gráfico o trapézio indicado na figura supra: será, pois, este o gráfico das *soluções possíveis*. Note-se que este conjunto é *convexo* (cf. pág. 57).

Designando agora por z o lucro garantido ao comerciante, será

$$z = 4x + 3{,}5\,y$$

O que se pretende portanto é maximizar *esta expressão, isto é, determinar os valores de* x *e de* y *que tornam máximo o valor da forma* $4x + 3{,}5\,y$ *(chamada* objectivo do programa*), de acordo com as restrições* (1).

Comecemos por construir a recta de nível $4x + 3{,}5\,y = 0$ da forma linear considerada, como vem indicado na figura; todas as outras rectas de nível da forma são paralelas a esta e o valor z da forma cresce de baixo para cima (ou da esquerda para a direita). *Achar a solução óptima equivale pois a determinar a recta de nível de máxima ordenada na origem que encontra o gráfico das soluções possíveis (o trapézio indicado).*

Este problema pode ser resolvido geometricamente ou analiticamente. Imediatamente se reconhece que a solução (x, y) procurada deve ser um dos vértices do trapézio, que são:

$$(0{,}0)\ ,\ (3{,}0)\ ,\ (3{,}2)\ \text{ e }\ (0{,}5)$$

Os dois primeiros são desde logo eliminados. Para decidir, analiticamente, qual dos últimos é a solução, basta ver quais são os valores que a forma objectivo toma em cada um desses pontos:

$$4 \times 3 + 3{,}5 \times 2 = 19$$
$$4 \times 0 + 3{,}5 \times 5 = 17{,}5$$

Como o maior valor é o primeiro, segue-se que a solução *óptima* é $x = 3$ e $y = 2$ (toneladas), sendo o máximo lucro possível 19 contos.

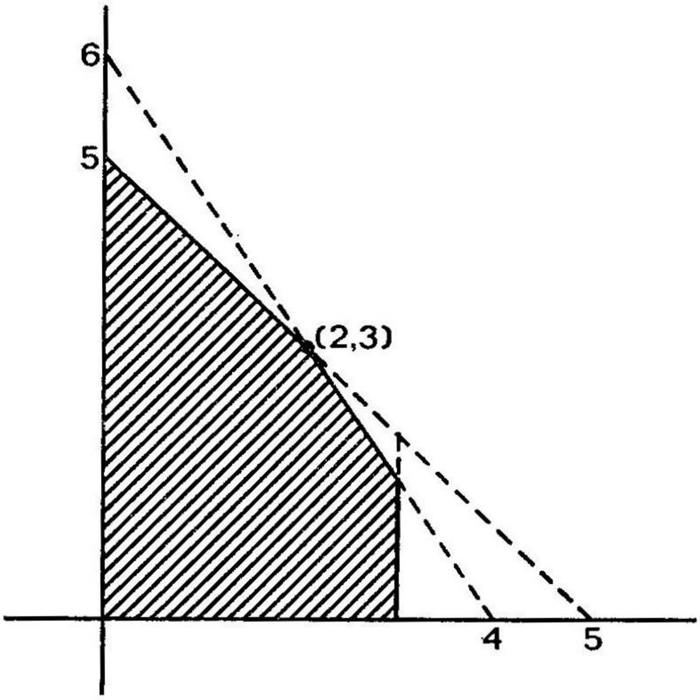
Vamos agora juntar uma nova restrição ao programa:

A fábrica A produz uma tonelada dessa mercadoria em cada 3 meses e a fábrica B produz uma tonelada em cada 2 meses, mas as fábricas não podem trabalhar simultaneamente por exigirem a presença de um mesmo técnico. Por outro lado, o comerciante não pode esperar mais 12 meses.

Este condicionamento traduz-se pela fórmula

$$3x + 2y \leqslant 12$$

e o domínio das soluções possíveis é agora o conjunto convexo



indicado na figura junta. Quanto à solução óptima pode ver-se que é agora

$$x = 2 \quad , \quad y = 3,$$

sendo o lucro máximo 18,5 contos.

Vejamos um outro exemplo, análogo ao anterior:

Um comerciante pretende obter um lucro não inferior a 28 contos com a venda de uma mercadoria que pode encomendar a duas fábricas A e B. A fábrica A garante um lucro de 4 contos por tonelada e pode produzir à razão de uma tonelada por quatro meses, mas não pode fornecer ao todo mais de 5 toneladas da mercadoria. A fábrica B garante um lucro de 3500 escudos por tonelada e pode produzir à razão de uma tonelada por três meses, mas não pode fornecer ao todo mais de 6 toneladas. Investigar a melhor maneira de fazer as encomendas, de modo a obter a mercadoria no mínimo prazo possível *(em regime de trabalho não simultâneo).*

Neste caso as restrições do programa são

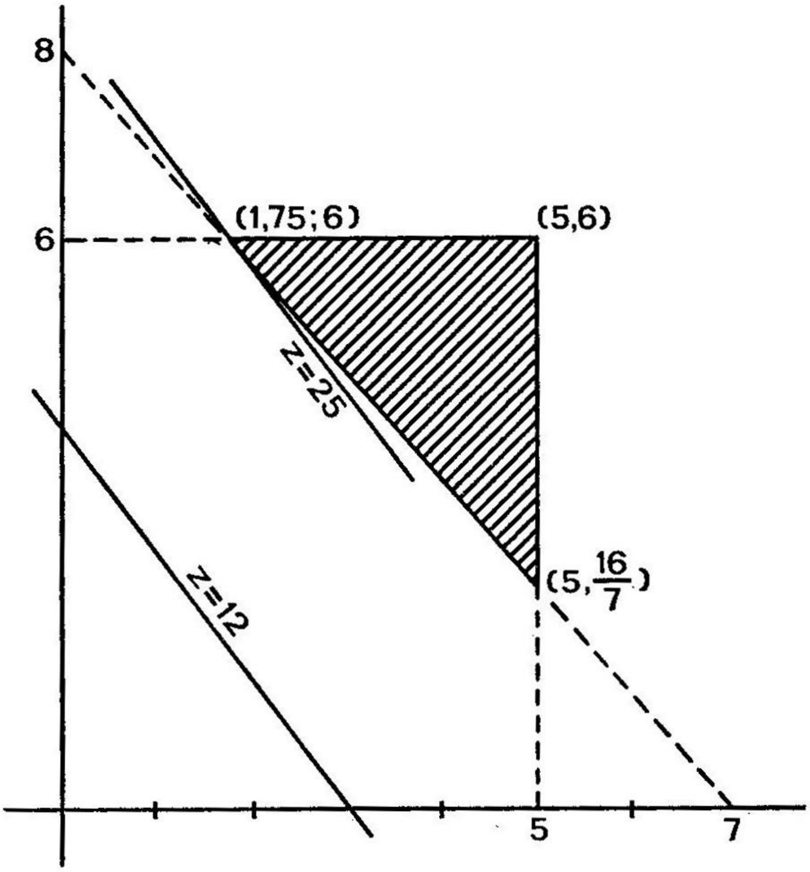
$$0 \leqslant x \leqslant 5 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 6 \quad , \quad 4x + 3{,}5\,y \geqslant 28$$

e a forma objectivo é

$$z = 4x + 3y$$

Todavia, ao contrário do que sucede no problema anterior, o que se pretende é *minimizar*, e não *maximizar*, esta forma.

O gráfico das soluções possíveis é o triângulo indicado na figura seguinte:



A solução óptima pode ser obtida analiticamente, comparando os valores que a forma toma nos vértices (1,75; 6) e $\left(5, \dfrac{16}{7}\right)$ do triângulo. Como esse valor é menor no primeiro ponto, a solução óptima será

$$x = 1{,}75 \quad \text{e} \quad y = 6 \quad \text{(toneladas)}$$

Para a resolução gráfica, construiu-se primeiro a linha de nível da forma e procurou-se em seguida a paralela a esta recta menos afastada da origem que encontra o triângulo.

Modifiquemos agora ligeiramente o enunciado do problema: suponhamos que a fábrica A produz à razão de uma tonelada por quatro meses e a fábrica B à razão de uma tonelada por três meses e meio.

Então é fácil ver que existe uma infinidade de soluções óptimas, representadas por todos os pontos do segmento de extremos (1,75; 6) *e* (5,16/7).

Os problemas de programação linear são apenas um caso particular dos *problemas de máximos e mínimos condicionados para funções de mais de uma variável.* Em programas de grandes empresas o número de variáveis é por vezes enorme, chegando a ser necessário resolver sistemas com mais de 100 incógnitas, *o que seria impossível num prazo razoável, antes da era dos computadores electrónicos.*

18. O estudo elementar das cónicas, tratado no Capítulo IV do livro, terá de ser feito agora de maneira diferente. *O assunto deverá ser adiado para o 7.º ano.* O que nos parece que não deve ser de modo nenhum menosprezado no ensino liceal. As cónicas tiveram sempre um grande interesse, e hoje mais do que nunca, com os progressos da astronáutica.

Inicialmente as cónicas serão definidas como sendo as secções planas das superfícies cónicas de revolução (ver n.º 65 do livro, pág. 130). Convém dispor de modelos nas turmas experimentais, para concretização deste assunto. O exemplo familiar da mancha luminosa, produzida numa parede por uma lâmpada de algibeira ou por um candeeiro munido de *abat-jour* de bordo circular, é também um recurso eficaz e sugestivo, sempre aconselhável.

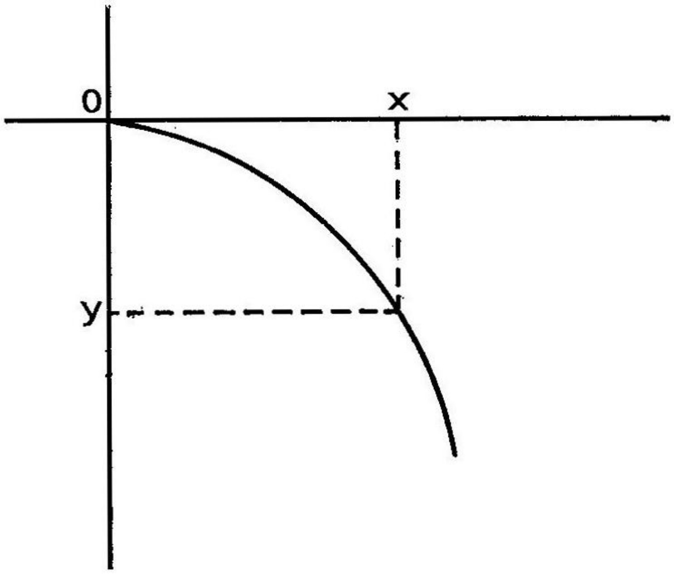
Mas não deve ficar por aqui a motivação do estudo das cónicas. O aluno aprenderá a seu tempo que o gráfico duma função quadrática é uma parábola. *A demonstração de que esse gráfico é efectivamente uma parábola,* de acordo com a definição anterior de parábola, como secção cónica de tipo particular, *será feita posteriormente. Mas seria um erro pedagógico grave não concretizar desde logo este assunto com exemplos da cinemática.*

O aluno ouve dizer, desde muito cedo, que um projéctil, lançado à superfície da Terra em direcção não vertical, segue uma trajectória aproximadamente parabólica, desde que a resistência do ar não seja muito apreciável e que a velocidade inicial não ultrapasse um certo limite (de contrário o projéctil pode entrar em órbita elíptica ou afastar-se definitivamente da Terra!). A trajectória será tanto mais próxima duma parábola quanto menores forem a resistência do ar e a extensão da superfície terrestre considerada (convém insistir mais uma vez no carácter aproximado de todo o conceito geométrico).

A demonstração deste facto não oferece dificuldade. Comecemos pelo caso em que o projéctil é lançado horizontalmente. Suponhamos que a velocidade inicial é, por exemplo, de 3 m/s. Então, *desprezando a resistência do ar e admitindo que a força da gravidade é constante em direcção, sentido e intensidade,* o movimento do projéctil será o resultante dos dois seguintes:

1) um movimento horizontal, rectilíneo e uniforme, com a velocidade de 3 m/s;

2) um movimento vertical, uniformemente variado.



Tomemos para eixo dos x a recta horizontal a que se refere 1) e para eixo dos y a vertical a que se refere 2), orientada *de baixo para cima.* Então, supondo que a aceleração da gravidade é de 9,8 m/s², as equações destes movimentos serão respectivamente

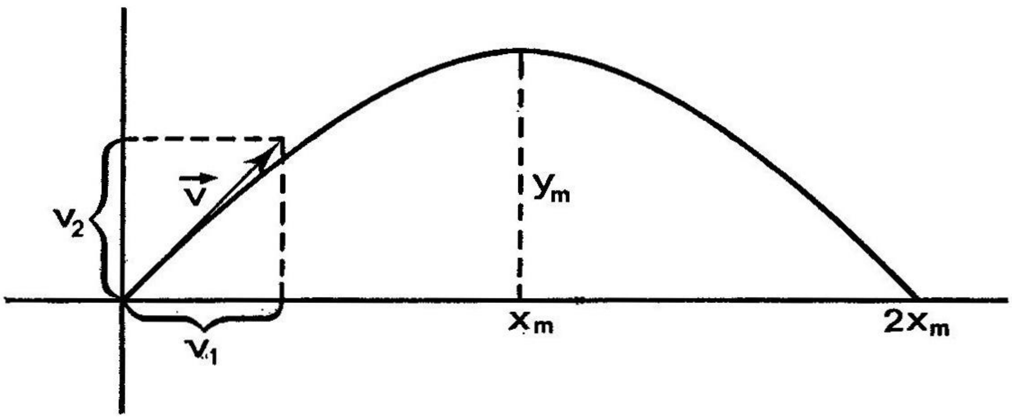
$$(1) \qquad \begin{cases} x = 3\ t \\ y = -\ 4{,}9\ t^2 \end{cases}$$

e podemos dizer que o *movimento resultante é definido por este sistema de equações.* Para ter a *equação cartesiana da trajectória,* o que há a fazer é eliminar a variável t entre as duas equações, o que dá *aproximadamente:*

$$(2) \qquad y = -0{,}54\ x^2$$

Como se vê, a trajectória é um arco de parábola de eixo vertical, com a concavidade voltada para baixo. Diz-se que (2) é a *equação cartesiana* da parábola (equação nas coordenadas x, y). Por outro lado, diz-se que as equações (1) são *equações paramétricas* da parábola, sendo *t* o *parâmetro.*

Pode em seguida considerar-se o caso geral. Sejam v_1 e v_2 as componentes do vector velocidade inicial. Então o módulo



desta será

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

e o movimento do projéctil será o resultante dos dois seguintes:

1) movimento horizontal uniforme, de equação

$$x = v_1 t\ ;$$

2) movimento vertical, uniformemente variado, de equação

$$y = v_2 t - \frac{1}{2}\, g t^2$$

A equação cartesiana da trajectória obtém-se eliminando t entre estas duas equações, o que dá

$$y = \frac{v_2}{v_1}\, x - \frac{g}{2v_1^2}\, x^2$$

Como se vê, trata-se ainda duma parábola de eixo vertical e de concavidade voltada para baixo. Mas o eixo da parábola só coincide com o eixo dos y se $v_2 = 0$ (nesse caso o vértice da parábola coincide com a origem).

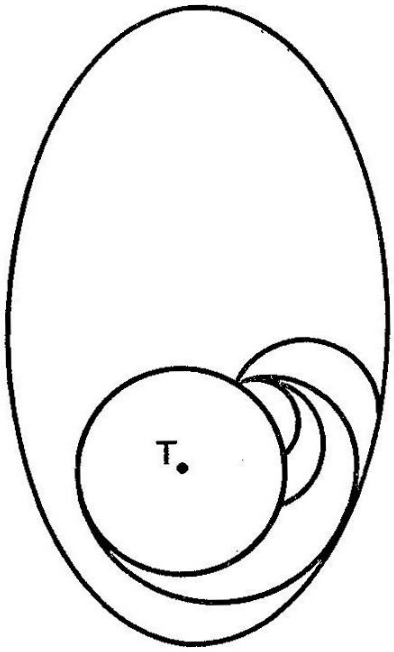
Se $v_2 > 0$, a ordenada do vértice da parábola é a altura máxima alcançada pelo projéctil. Como a abcissa do vértice é [1]

$$x_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2}{v_1} \Big/ \frac{g}{2v_1^2} = \frac{v_1 v_2}{g},$$

a referida altura será

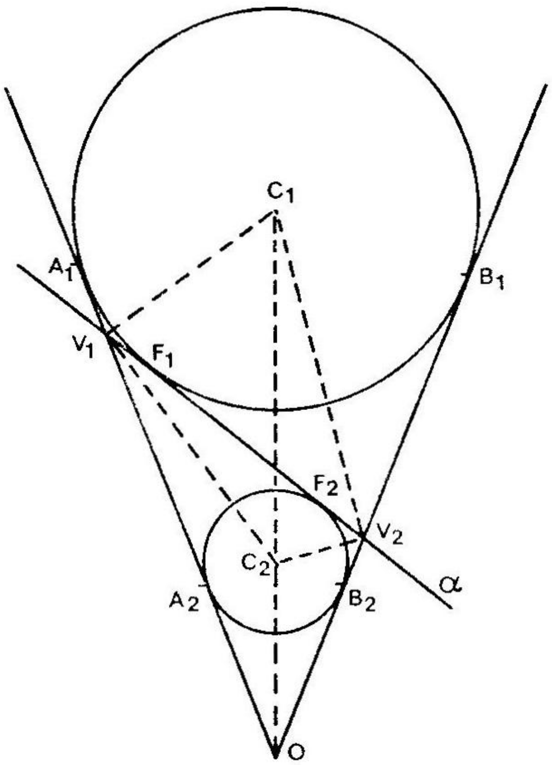
$$y_m = \frac{v_2}{v_1} x_m - \frac{g}{2v_1} x_m^2 = \frac{v_2^2}{2g}$$

Por sua vez, o *alcance horizontal* do projéctil é $2x_m$. Este alcance será tanto maior quanto maior for $v_1 v_2$. No entanto, à medida que o alcance cresce, a trajectória vai-se afastando cada vez mais da forma parabólica e, para além de um certo limite, o projéctil não poderá regressar à Terra. No entanto, para ser colocado em órbita fechada, o projéctil necessitará de uma força propulsora conveniente durante a fase ascensional. Finda esta, a órbita será aproximadamente uma *elipse*, de que o centro da Terra é um dos focos.



(1) Supõe-se que neste momento se está no 7.º ano e o aluno já fez um estudo preliminar do gráfico das funções quadráticas. *O exemplo cinemático que estamos agora analisando poderá, com vantagem, ser apresentado a propósito desse estudo.*

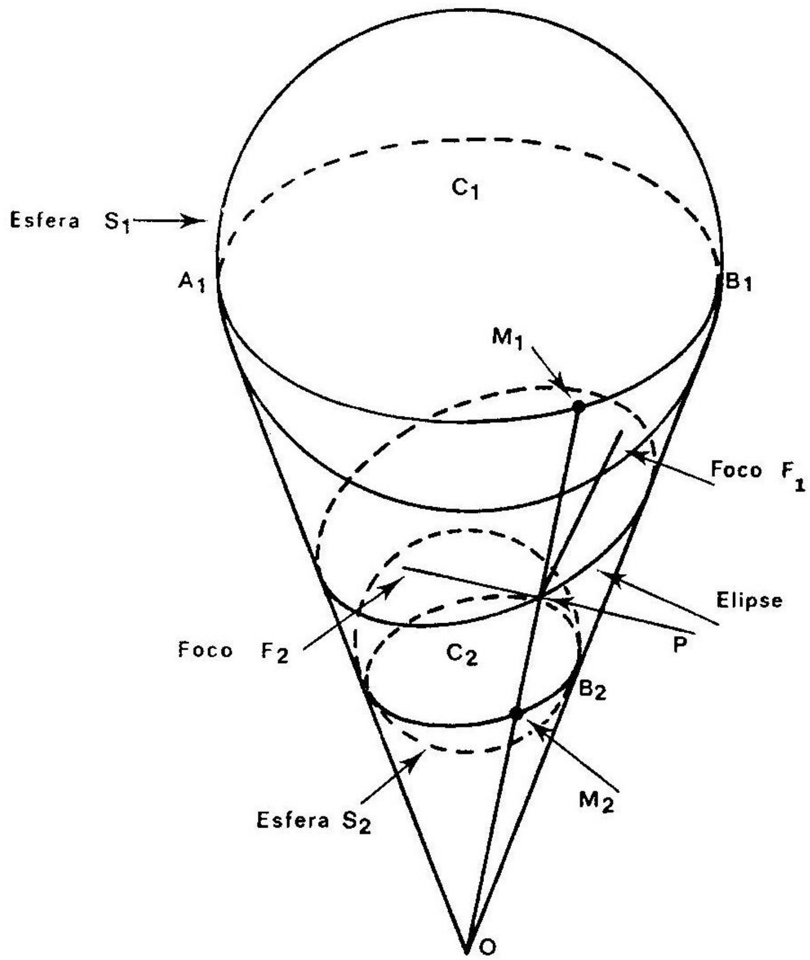
19. Após estas considerações, convém passar à demonstração das propriedades focais das cónicas que, como é sabido, permitem dar novas definições de 'elipse', 'hipérbole' e 'parábola'. A demonstração mais simples e elegante que se conhece foi descoberta em 1822 pelo matemático belga Dandelin. O Prof. Tom Apostol chama-lhe pitorescamente 'ice-cream-cone proof' (demonstração *cone de gelado*), pelo aspecto que toma, no caso da elipse, a figura a que se recorre nessa demonstração.



Para fazer a demonstração neste caso (da elipse), consideremos uma superfície cónica de revolução, Σ, e um plano α que não seja paralelo a nenhuma geratriz e não passe pelo vértice do cone. Então o plano α corta a superfície Σ segundo uma elipse, $\mathcal{E}$. Por sua vez, o plano que passa pelo eixo de revolução de Σ e é perpendicular a α corta a superfície cónica segundo duas geratrizes, OV_1 e OV_2, e corta o plano α segundo uma recta, V_1V_2 (na figura supra supõe-se que o corte é feito pelo próprio plano da figura). É fácil ver que existem duas e só duas circunferências tangentes às 3 rectas OA_1, OA_2 e V_1V_2. O centro C_2 duma dessas circunferências é o ponto de encontro das bissectrizes dos ângulos internos do triângulo $[OV_1V_2]$. O centro C_1 da outra circunferência é o ponto de encontro das bissectrizes dos ângulos $A_1\hat{V}_1V_2$ e $V_1\hat{V}_2B_1$.

Esta circunferência toca, portanto, a recta V_1V_2 num ponto F_1 e as rectas OV_1 e OV_2 em pontos A_1 e B_1, respectivamente. Por sua vez, a outra circunferência toca as mesmas rectas, em pontos que designaremos por F_2, A_2 e B_2, respectivamente.

Ora, quando esta figura roda em torno da recta OC_1, a recta OA_1 gera a superfície cónica Σ e as duas circunferências consideradas geram duas superfícies esféricas S_1 e S_2, que são tangentes ao plano secante α nos pontos F_1 e F_2, e à superfície cónica segundo duas circunferências, geradas pelos pontos A_1 e A_2 (ou B_1 e B_2). Na figura seguinte, que sugere a designação 'ice-cream-cone proof', estão indicadas em perspectiva a superfície cónica Σ, as superfícies esféricas S_1 e S_2, e a elipse $\mathcal{E}$, intersecção de α com Σ. É a essa figura que passamos agora a referir-nos.



Seja P um ponto qualquer da elipse $\mathcal{E}$; e sejam M_1 e M_2, respectivamente, os pontos em que a geratriz OP toca nas superfícies esféricas S_1 e S_2. Ora as rectas PF_1 e PF_2, que passam pelo ponto P, também são tangentes a S_1 e S_2, e tem-se [1]

$$(1) \qquad |PF_1| = |PM_1| \quad , \quad |PF_2| = |PM_2| \, ,$$

em virtude do seguinte facto, cuja demonstração se pode fazer como nas considerações iniciais:

Quando, por um ponto P *exterior a uma esfera* S, *se conduzem rectas tangentes a* S, *as distâncias de* P *aos pontos de tangência são todas iguais entre si.*

Por outro lado, tem-se:

$$|PM_1| + |PM_2| = |M_1M_2|$$

Daqui e de (1) resulta então

$$|PF_1| + |PF_2| = |M_1M_2|$$

E, como a distância de M_1 a M_2 não depende de P (é sempre a mesma qualquer que seja a geratriz OP considerada), conclui-se:

A soma das distâncias de um ponto P *da elipse aos pontos* F_1 *e* F_2 *é sempre igual a um mesmo comprimento* $|M_1M_2|$.

Poderia ainda demonstrar-se que, reciprocamente:

Se Q *é um ponto do plano* α *tal que a soma das distâncias de* Q *a* F_1 *e a* F_2 *é igual a* $|M_1M_2|$, *então* Q *pertence à elipse* $\mathcal{E}$.

Por conseguinte:

A elipse $\mathcal{E}$ *é o conjunto (ou o lugar geométrico) dos pontos* P *do plano* α *tais que a soma das distâncias de* P *a* F_1 *e* F_2 *é sempre igual a* $|M_1M_2|$.

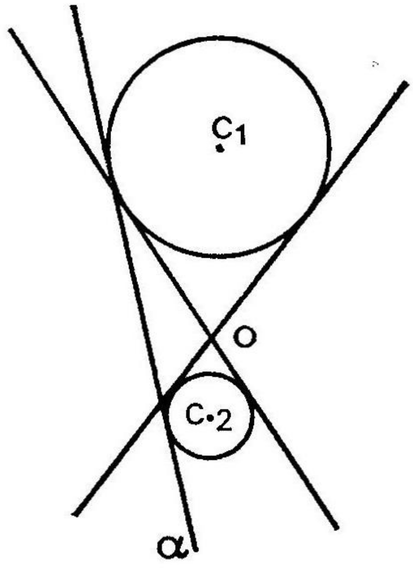
Temos pois aqui uma propriedade característica do género elipse, *propriedade que se pode tomar para definição deste género de cónicas, tal como se fez no livro. Deve fazer-se em seguida o estudo dos métodos de construção indicados no livro.*

Para o género hipérbole, a demonstração de Dandelin é análoga, com a diferença de que se consideram agora duas esferas tangentes segundo circunferências às duas folhas do cone, como

---

[1] Dados dois pontos A e B, designamos por $|AB|$ a distância de A a B, ou seja, o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

se indíca na figura junta (bastará indicar esta diferença ao aluno, bem como a propriedade focal característica do género hipérbole).

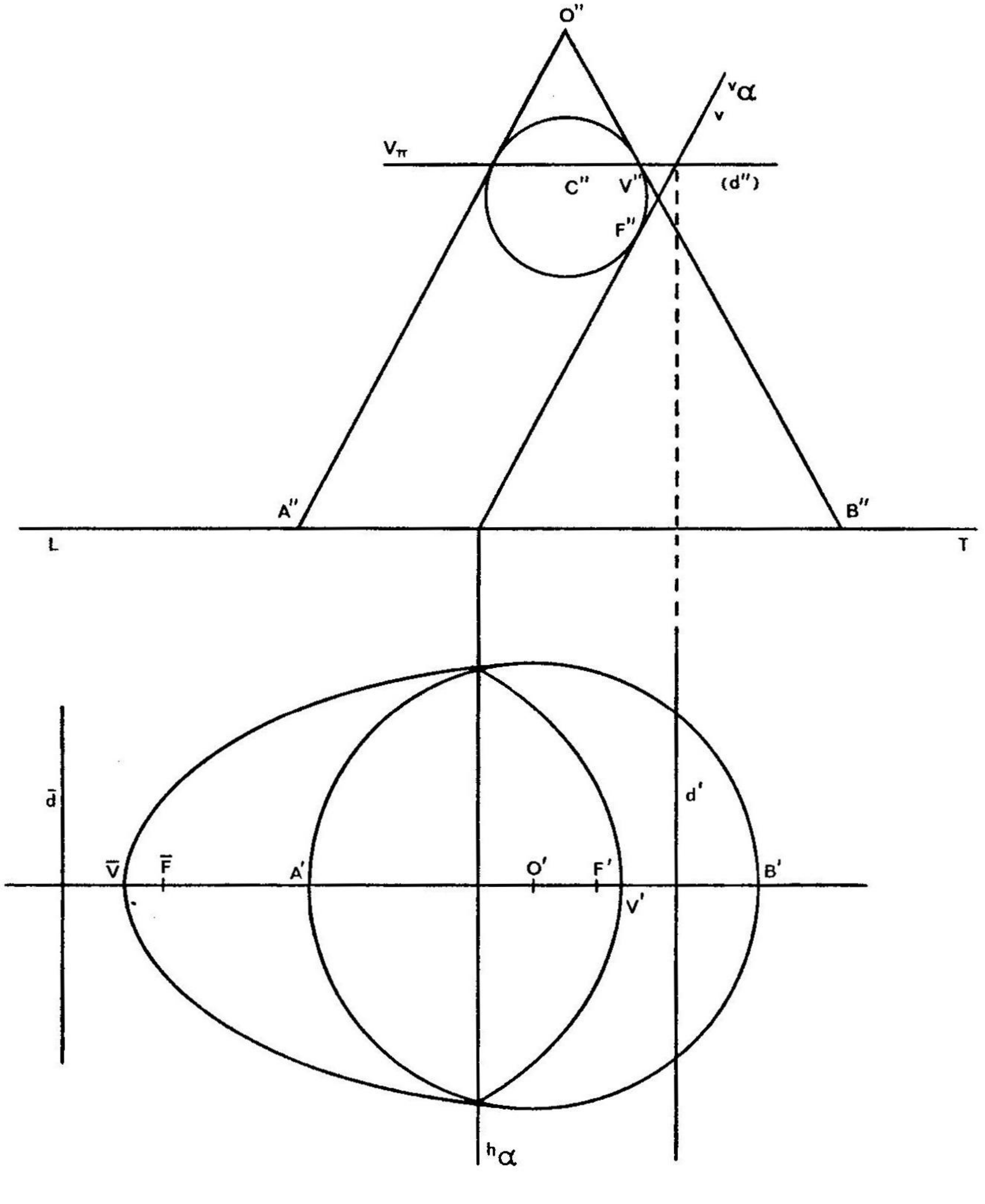


Quanto ao género parábola, a demonstração é um pouco diferente: considera-se apenas uma esfera e, em vez de dois focos, tem-se um foco e uma directriz (intersecção do plano secante com o plano da circunferência em que a esfera é tangente à superfície cónica).

NOTA. Para a demonstração *cone de gelado*, convém dispor previamente de figuras bastante bem desenhadas, em tamanho razoável, a fim de serem vistas ao mesmo tempo por toda a turma. Poderia solicitar-se para isso a colaboração do professor de Desenho.

Melhor ainda seria dispor de modelos que permitissem aos alunos ver *num relance* a ideia da demonstração — e numa demonstração o que mais interessa é, precisamente, a *ideia*, ou melhor, a *intuição* donde nasce. *O estudo começaria então pelo modelo, e só depois se passaria à análise do assunto, isto é, aos pormenores da demonstração.*

Também se poderia estabelecer utilmente coordenação com a disciplina de Desenho, ilustrando o estudo anterior por meio da Geometria Descritiva. Na figura da página seguinte é determinada, em rebatimento, pelo método de Monge, a secção parabólica feita por um plano de topo num cone de revolução de eixo vertical. São determinados o foco e a directriz da parábola pelo processo de Dandelin. Em seguida o aluno pode verificar *experimentalmente* que a parábola é o lugar dos pontos equidistantes do foco e da directriz.


O''
ᵛα
v
V_π
C''
V''
(d'')
F''
A''
B''
L
T
d̄
d'
V̄
F̄
A'
O'
F'
B'
V'
ʰα

20. Posto isto, chega o momento de fazer o estudo das cónicas pelo método da geometria analítica. Começaremos pelo caso mais simples — o da parábola — tratado com todo o pormenor, como se faz no livro.

Assim, finalmente, o aluno pode tomar consciência (o que é essencial) de que são equivalentes as três definições de parábola:

1) *como secção cónica,*

2) *como conjunto dos pontos do plano equidistantes do foco e da geratriz,*

3) *como gráfico da função quadrática.*

O estudo geral da parábola como gráfico da função quadrática é feito, quer no livro de *Geometria Analítica*, quer no *Compêndio de Matemática*, 1.º volume, 2.º tomo, Cap, VI, n.º 14, págs. 113-115. *Esse estudo deve considerar-se imprescindível.*

Quanto aos casos da elipse e da hipérbole bastará fazer um estudo analítico bastante abreviado, segundo as linhas gerais da exposição feita no livro, do n.º 50 ao n.º 60. A dedução das equações reduzidas não será desenvolvida: bastará indicar o ponto de partida e o ponto de chegada, esclarecendo o significado dos parâmetros *a*, *b*, *c* e dizendo ao aluno que a técnica da demonstração é perfeitamente análoga à que foi seguida no caso da parábola. *Deve, no entanto, ser considerada imprescindível a matéria do n.º 60; só então o aluno poderá reconhecer que são equivalentes as três definições de hipérbole consideradas:*

1) *como secção cónica,*

2) *como conjunto de pontos definido pela propriedade focal,*

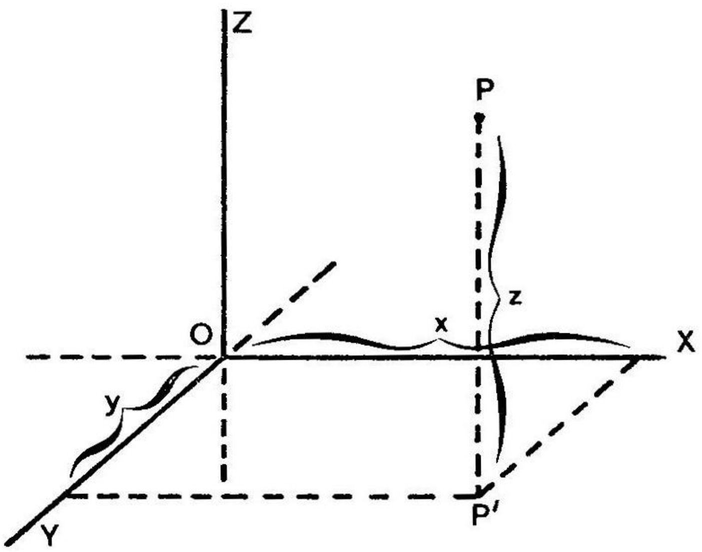
3) *como gráfico da função homográfica (hipérbole equilátera).*

O estudo geral da função homográfica é feito no *Compêndio de Matemática*, 1.º volume, 2.º tomo, Cap. VI, n.º 32, pág. 182. E com isto se dará por concluído o estudo das cónicas no ensino liceal.

21. Passaremos, agora, a um assunto novo no ensino liceal: *a introdução ao estudo da geometria analítica no espaço.* A inclusão deste assunto no programa do 3.º ciclo (de preferência no 7.º ano),

impõe-se, não só do ponto de vista da preparação para a Universidade, como ainda do ponto de vista da cultura geral. Além disso, a matéria que interessa realmente tratar nesta fase de iniciação é muito fácil e presta-se inteiramente ao método heurístico, por analogia com a geometria analítica plana.

Bastará tomar como base um *referencial ortonormal* (isto é, *ortogonal* e *monométrico).*



Consideremos, pois, três rectas orientadas OX, OY e OZ, que se cortem perpendicularmente em O, e uma unidade de comprimento igual para as três rectas.

Dado um ponto P qualquer do espaço, apresente-se ao aluno a questão.

Como definir o ponto P, *por meio de números reais, de modo análogo ao que se faz em geometria analítica plana?*

Haverá toda a vantagem em concretizar o assunto por meio dum modelo, que pode ser muito simplesmente constituído pelo chão e duas paredes da sala da aula, sendo P representado pela ponta dum lápis ou dum ponteiro (os modelos usuais de cartão ou plástico com arames e pequenas esferas serão depois úteis ao considerar pontos com uma ou mais coordenadas negativas).

Colocado perante esta questão, o aluno será provavelmente levado a considerar a projecção horizontal de P, isto é, a projecção P' de P sobre o plano XOY. Ora o ponto P', neste plano cartesiano, é definido por um par ordenado de números reais, x (a *abcissa* de P) e y (a *ordenada* de P). Para definir P, bastará então dar um terceiro número real — e o mais natural é que este seja a distância do ponto P ao plano horizontal (plano XOY), com o sinal + ou − conforme P está acima ou abaixo desse plano (se P pertence ao plano, é claro que a distância é 0). O número real assim obtido — que designaremos por z — chama-se *cota* de P (ver figura anterior). Assim o aluno reconhece que:

A cada ponto P *do espaço fica a corresponder, pelo processo descrito, um terno ordenado* (x, y, z) *de números reais.*

Não será agora difícil levar o aluno a concluir que, reciprocamente:

Dado um terno ordenado (x, y, z) *de números reais, qualquer que ele seja, existe sempre um e um só ponto* P *do espaço que lhe corresponde, segundo o processo indicado.*

(O aluno começa por observar que o par (x, y) define um ponto P′ do plano XOY; em seguida observa que, sobre a recta vertical que passa por P′, existe um e um só ponto cuja cota é z.)

Os números x, y, z dizem-se as coordenadas de P, respectivamente a *abcissa*, a *ordenada* e a *cota* (no referencial fixado).

Designemos por $\mathcal{E}_3$ o *espaço* (1), isto é, o conjunto de todos os pontos considerados como existentes em *geometria euclidiana elementar*. O aluno já sabe que se designa por $\mathbb{R}^3$ o cubo cartesiano de $\mathbb{R}$, isto é, o conjunto de todos os possíveis ternos ordenados de números reais. Podemos pois, em resumo, concluir que:

Pelo processo indicado, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\mathcal{E}_3$ *e* $\mathbb{R}^3$.

É, no fundo, este facto que leva a dizer habitualmente:

O espaço $\mathcal{E}_3$ *(da geometria euclidiana elementar) tem* 3 *dimensões:*

Ainda o mesmo facto induz a chamar a $\mathbb{R}^3$ o *espaço numérico tridimensional.*

Mas restam dois pontos a esclarecer:

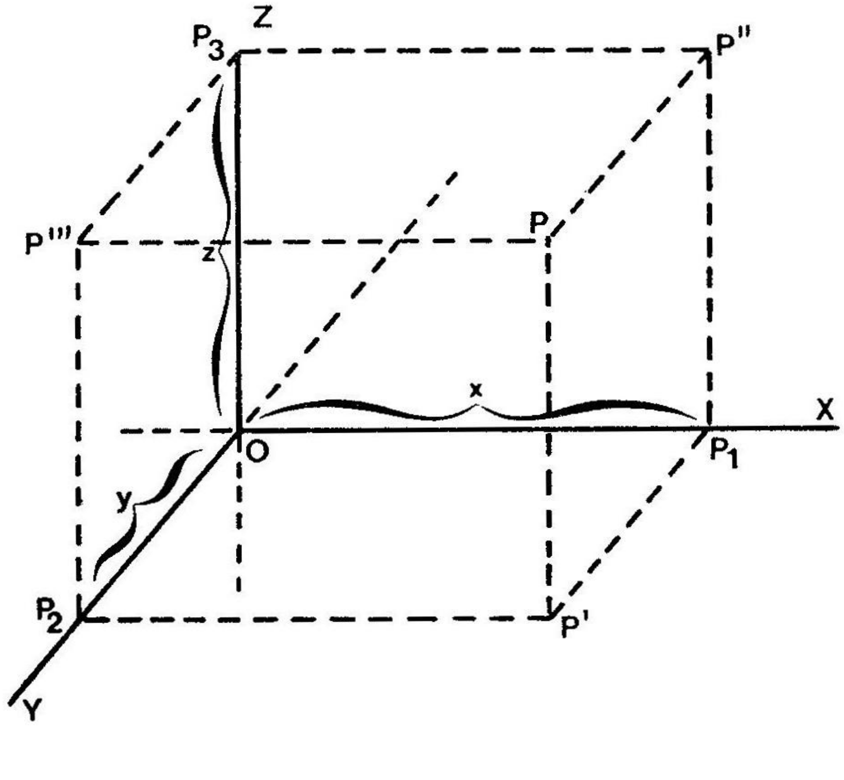
1.º — Para determinar as coordenadas de um ponto P dado, começámos por considerar a projecção ortogonal P′ de P sobre o plano XOY. Se, em vez desta, tivéssemos considerado a projecção ortogonal P″ de P sobre XOZ ou a projecção P‴ de P sobre YOZ, obteríamos, de modo análogo, as mesmas coordenadas x, y, z de P?

---

(1) Subentende-se 'espaço físico ligado a um determinado corpo sólido, por exemplo a Terra', admitindo que existe um tal espaço (ver n.º 4).

2.º — Os eixos OX, OY e OZ foram considerados em posição especial e orientados também de modo especial em relação ao observador, o que envolve noções de carácter não geométrico, tais como as de *'horizontal', 'vertical', 'da esquerda para a direita',' de trás para diante', 'de baixo para cima'.* Será possível expor o assunto de modo mais rigoroso, embora menos intuitivo, não fazendo apelo a tais noções?

Estas duas questões estão interligadas e o seu esclarecimento pode ser feito, recorrendo ao paralelepípedo de vértices P, P′, P″, P‴, P_1, P_2, P_3, O.



É fácil ver que a cota, z, do ponto P é igual à medida [1] do segmento $\overline{OP_3}$, com o sinal + ou −, conforme P_3 está na parte positiva ou negativa do eixo OZ (por isso diremos que este é o *eixo das cotas* ou eixo dos z). Portanto, as três coordenadas de P podem ser determinadas do seguinte modo:

Considerem-se os três planos que passam por P *e são perpendiculares respectivamente aos eixos* OX, OY *e* OZ. *Esses planos*

---

[1] Medida dum segmento $\overline{AB}$ é o mesmo que medida do seu comprimento $|AB|$.

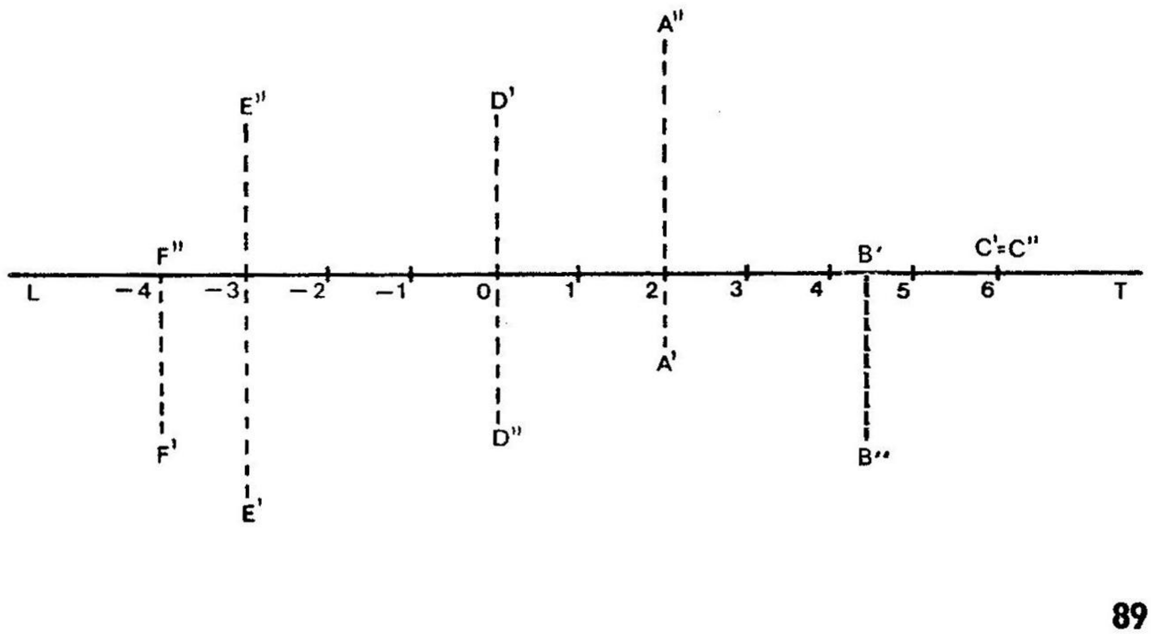
cortam os eixos em três pontos, que chamaremos projecções ortogonais *de* P *sobre* OX, OY *e* OZ, *e designaremos respectivamente por* P_1, P_2, P_3. *Cada um destes pontos, no eixo onde está, é representado por um número, relativamente à origem* O *e à unidade de comprimento adoptada. Os três números* x, y, z *assim obtidos são as* coordenadas *de* P *no referencial adoptado: respectivamente a* abcissa, *a* ordenada *e a* cota.

É evidente que, neste processo, a posição e a orientação dos eixos pode ser *qualquer*. Daqui se conclui que a determinação das coordenadas é independente da posição do observador e não faz intervir essencialmente noções de carácter não geométrico. Só por comodidade se recorre muitas vezes a tais noções.

Aliás, em todas as considerações anteriores, relativas à intropução da geometria analítica no espaço, há que ter presente a seguinte importante

NORMA DIDÁCTICA: *O esclarecimento total da questão posta de início deverá, segundo o método heurístico, ser feito em diálogo com o aluno, gradualmente, por tentativas, por aproximações sucessivas, até atingir o máximo rigor possível nesta fase. Usando uma imagem, poderíamos dizer que tudo se passa como se estivéssemos a focar uma paisagem, que se nos torna cada vez mais nítida.*

NOTA. Poderá ser útil recorrer neste momento à geometria descritiva de Monge, que o aluno aprende na disciplina de Desenho. A associação do método cartesiano com o método de Monge é feita habitualmente, tomando o plano XQY para plano *horizontal de projecção* e o plano XOZ para *plano vertical de projecção*, sendo



portanto o eixo OX a *linha de terra.* Na figura da página anterior são representados os pontos A, B, C, D, E, F que correspondem, respectivamente, aos seguintes ternos ordenados de números reais: (2, 1, 3), $\left(4\frac{1}{2}, 0 - 2\right)$, (6, 0, 0), (0, − 2, − 2), (− 3, 3, 2), (− 4, 2, 0). Note-se que na geometria de Monge a ordenada se chama 'afastamento' e que o termo 'abcissa' só aparece em geometria analítica.

Convirá também registar a seguinte terminologia:

recta horizontal (ou de nível): paralela a XOY
recta de frente: paralela a XOZ
recta de perfil: paralela a YOZ
recta vertical: perpendicular a XOY (ou paralela a OZ)
recta de topo: perpendicular a XOZ (ou paralelo a OY)
plano horizontal (ou de nível): paralelo a XOY
plano de frente: paralelo a XOZ
plano vertical: perpendicular a XOY (ou paralelo a OZ)
plano de topo: perpendicular a XOZ (ou paralela a OY)
plano de rampa: perpendicular a YOZ (ou paralelo a OX)

As rectas verticais também se dizem '*projectantes horizontais*' porque projectam os pontos sobre o plano horizontal.

As rectas de topo também se dizem '*projectantes verticais*' por análoga razão.

Os planos verticais também se dizem '*projectantes horizontais*' porque projectam rectas sobre o plano horizontal.

Os planos de topo também se dizem '*projectantes verticais*' por análoga razão.

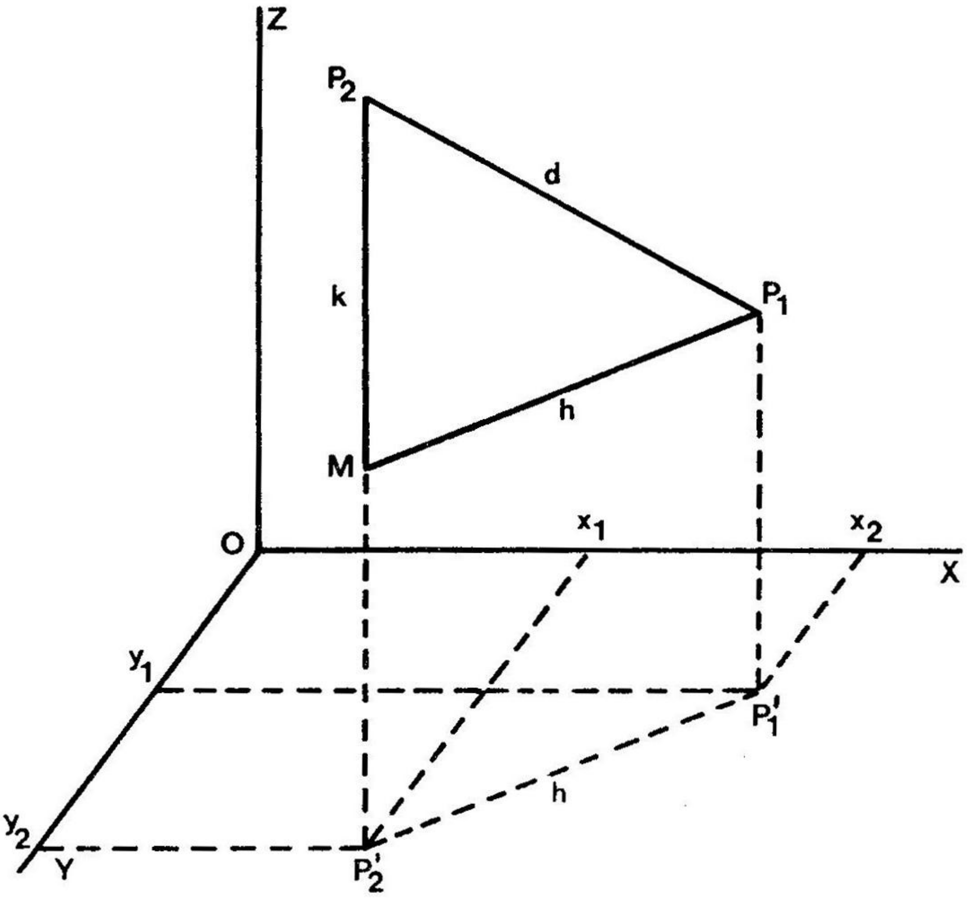
As rectas paralelas a OX dizem-se em geometria de Monge 'paralelas à linha de terra' precisamente porque se toma LT = OX.

Analogamente, os planos de rampa também se podem dizer 'paralelos à linha de terra'. Note-se que estes planos são *projectantes sobre o plano* YOZ.

22. O assunto que convém tratar logo em seguida é o da distância entre dois pontos. Aqui, mais uma vez, é o aluno quem irá redescobrir a fórmula, por analogia com o que se passa no

plano. Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer do espaço, representados respectivamente pelos ternos ordenados

$$(x_1, y_1, z_1) \text{ e } (x_2, y_2, z_2)$$



Suponhamos fixado um referencial ortogonal e consideremos as projecções horizontais, P'_1 e P'_2, de P_1 e P_2. Designemos por M o ponto de cota z_1 (igual à de P_1) situado na vertical de P_2. Então o triângulo $[M\ P_1\ P_2]$ é rectângulo em M e a distância d de P_1 a P_2 é dada pela hipotenusa $\overline{P_1P_2}$ desse triângulo. Designemos agora por h a medida do cateto $\overline{MP_1}$ e por k a medida do cateto $\overline{MP_2}$. Nestas condições, temos:

$$d^2 = h^2 + k^2$$

Mas $k = |z_1 - z_2|$. Por outro lado, h é igual à distância de P'_1 a P'_2 e, como já sabemos,

$$h^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Logo

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Neste momento o aluno não deve ter dificuldade em deduzir (por analogia com o caso da circunferência) a equação da superfície de centro (a, b, c) e raio r:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

assim como não terá dificuldade em reconhecer os gráficos de condições tais como

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant r^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 < r^2 \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 > r^2, \text{ etc.}$$

23. Convém agora passar ao estudo de *planos projectantes*, isto é, perpendiculares a algum dos planos coordenados (será conveniente usar modelos!).

Comecemos pelo exemplo da equação $z = 3$. Por analogia com o caso da geometria plana, é fácil reconhecer que

$$z = 3 \Leftrightarrow 0x + 0y + z = 3$$

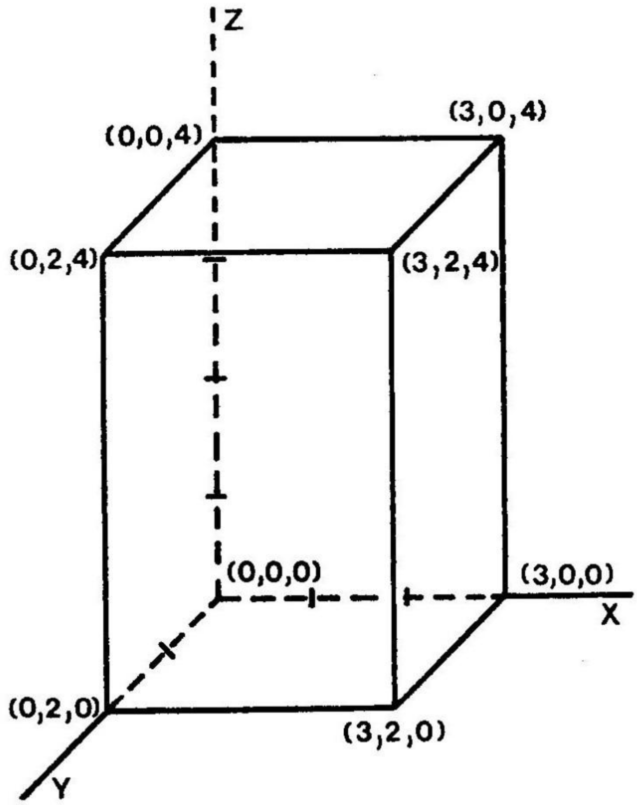
e que portanto a equação $z = 3$ representa o *conjunto de todos os pontos de cota* 3, ou *seja o plano horizontal de cota* 3.

Dum modo geral, as equações da forma $z = a$ representam os *planos horizontais*, as equações $y = b$ os *planos de frente* e as equações $x = c$ os *planos de perfil*. Em particular, as equações $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$ representam os planos coordenados XOY, XOZ e YOZ.

Por sua vez, a inequação $z \geqslant 3$ representa o semiespaço situado acima do plano $z = 3$, a condição $3 < x < 5$ representa o domínio compreendido entre os planos $x = 3$ e $x = 5$ (não incluindo estes planos), a condição

$$0 \leqslant x \leqslant 3 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant 2 \ \wedge \ 0 \leqslant z \leqslant 4$$

representa o paralelepípedo a seguir representado, de vértices (0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 4), (3, 2, 0), (0, 2, 4), (3, 0, 4) e (3, 2, 4), etc., etc.

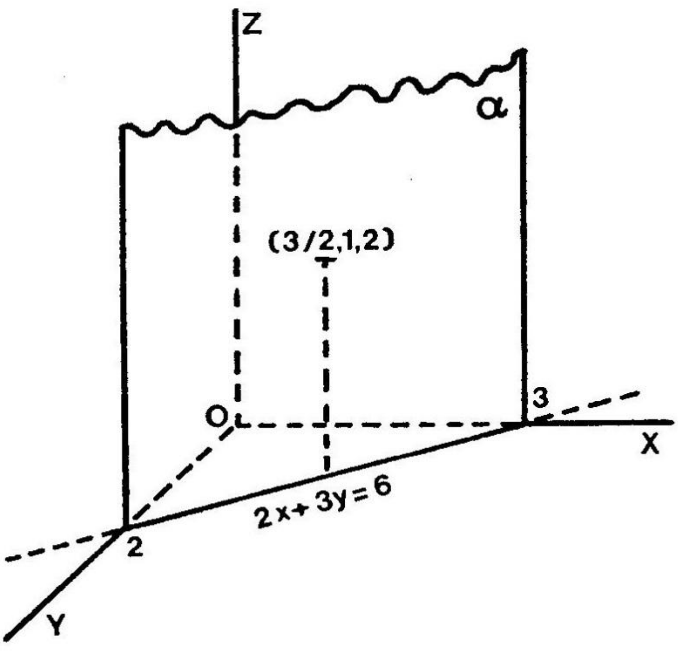


Apresenta-se agora ao aluno, por exemplo, a equação

$$2x + 3y = 6$$

Tem-se neste caso

$$2x + 3y = 6 \Leftrightarrow 2x + 3y + 0z = 6$$



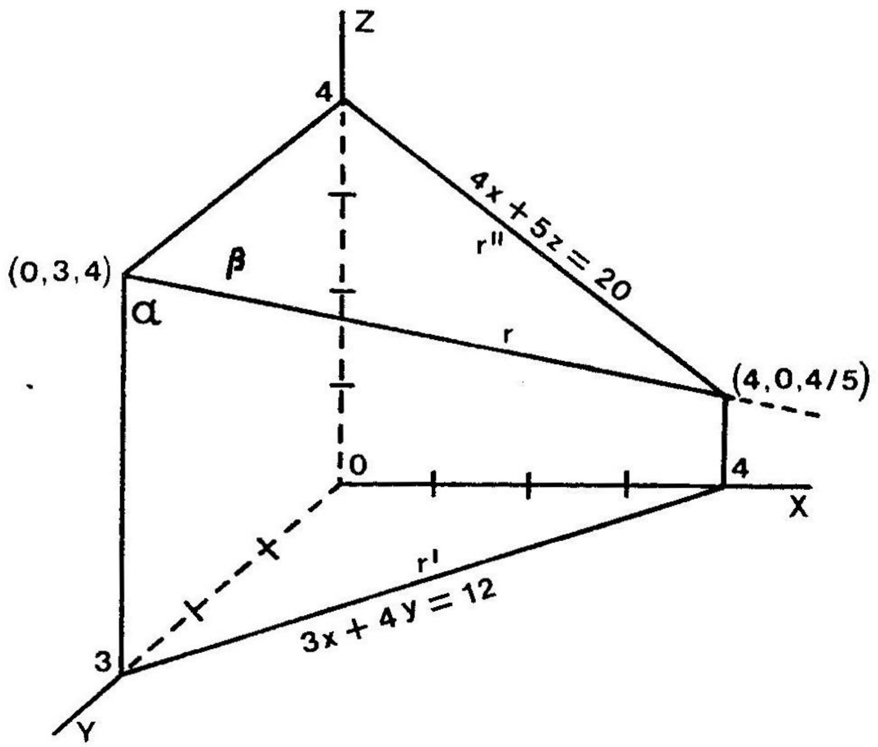
No plano XOY, a equação $2x + 3y = 6$ representa uma recta r desse plano. No espaço, a mesma equação representa o conjunto dos pontos (x, y, z) tais que $2x + 3y = 6$, *podendo* z *ser qualquer.* O aluno deverá reconhecer *por si mesmo* que este conjunto é o *plano vertical* α, *que passa por* r.

Mais geralmente, o aluno deve ser levado a reconhecer, de modo intuitivo, que as equações da forma $ax + by = c$ representam *planos verticais* (paralelos a OZ), que as equações $ax + bz = c$ representam *planos de topo* (paralelos a OY) e que as equações $ay + bz = c$ representam *planos de rampa* (paralelos a OX). Em particular, o plano $x + 2y = 0$ contém o eixo OZ, o plano $2x - z = 0$ contém o eixo OY, etc.

24. Pode-se agora fazer um estudo elementar da recta em geometria analítica do espaço.

Consideremos o sistema de equações

$$(1) \qquad \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4x + 5z = 20 \end{cases}$$



A primeira equação representa no plano XOY uma recta e representa no espaço o plano vertical, α, que passa por essa recta.

Por sua vez, a segunda equação representa no plano XOZ uma recta e representa no espaço o plano de topo, β, que passa por essa recta. Logo o sistema (1) representa a *intersecção desses dois planos*, ou seja a *recta* r *cujo plano projectante horizontal é* α *e cujo plano projectante vertical é* β. (Como exercício, pode-se propor a determinação dos pontos de encontro de r com os planos coordenados.)

Analogamente o sistema

$$y = 2x + 3 \wedge y + z = 5$$

representa a recta intersecção dos planos $y = 2x + 3$ e $y + z = 5$, que a projectam respectivamente sobre os planos XOY e YOZ.

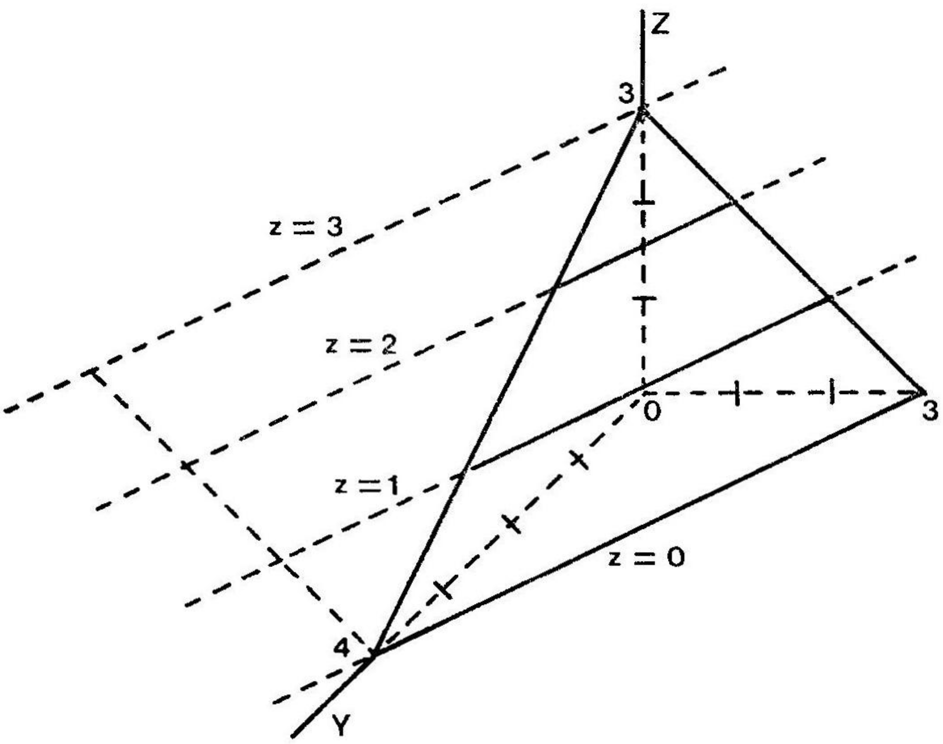
O aluno não terá dificuldade em identificar os gráficos de sistemas tais como

$$x = 3 \wedge y = 4 \quad , \quad x + y = 1 \wedge z = 3 \quad , \quad \text{etc.}$$

25. Consideremos agora a equação

$$4x + 3y + 4z = 12$$

Trata-se, como se vê, de uma *equação do* 1.º *grau nas três variáveis* x, y, z.



Para identificar o gráfico desta equação, consideremos as suas intersecções com planos horizontais. Comecemos pelo plano $z = 0$. Tem-se

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ora o aluno já sabe que o gráfico do segundo sistema é uma recta (contida no plano XOY).

Analogamente

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 12 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

Agora a intersecção é uma recta horizontal de cota 1.

Dum modo geral, sendo c um número real qualquer, tem-se

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 12 \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 12 - 4c \\ z = c \end{cases}$$

A intersecção é sempre uma recta (horizontal de cota c*).*

Analogamente

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

A intersecção com o plano XOZ é pois também uma recta. Deste modo se vê que:

O gráfico da equação $4x + 3y + 4z = 12$ *é a reunião de todas as rectas paralelas à recta de equações* $4x + 3y = 12$, $z = 0$ *e que passam pela recta, de equações* $x + z = 3$ e $y = 0$; *esse gráfico é portanto um plano.*

Não é, assim, difícil levar o aluno a reconhecer indutivamente que toda a equação da forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

em que um pelo menos dos coeficientes A, B, C é diferente de zero, representa um plano, e que, reciprocamente, todo o plano é representável por uma equação desta forma.

NOTA. As rectas horizontais contidas num plano α são chamadas as *rectas de nível de* α (ver exemplo anterior). É claro que todo o plano é a reunião das suas rectas de nível, como é a reunião das suas rectas de frente ou das suas rectas de perfil.

Podemos, agora, dar uma nova interpretação geométrica à resolução dos problemas de programação linear considerados no n.º 17 *tomando para cotas os valores z das formas lineares objectivo.* Assim, por exemplo, no último problema, a forma linear objectivo $z = 4x + 3y$ tem agora por gráfico um plano, enquanto a conjunção

$$0 \leqslant x \leqslant 5 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 6 \wedge 4x + 3{,}5y \geqslant 28$$

das restrições do programa tem por gráfico, no espaço, um prisma triangular de arestas verticais. A solução óptima é então dada pelo ponto da *cota mais baixa, em que o plano representativo* da forma intersecta este prisma, ou seja o ponto (1,75; 6; 25). Note-se ainda que *as rectas de nível da forma são agora as projecções horizontais das rectas de nível do respectivo plano.*

26. O aluno já teve ocasião de verificar que, *enquanto um plano é representável por uma única equação cartesiana, uma recta no espaço só pode ser representada por um sistema de duas equações cartesianas.* Até aqui apenas se considerou o caso de rectas representadas pelas equações de dois dos seus planos projectantes (equações em que é nulo o coeficiente de uma das variáveis). Mas pode apresentar-se o caso de uma recta definida como intersecção de dois planos quaisquer. Ora é sempre possível reduzir este caso ao anterior por eliminação de variáveis, aplicando por exemplo o método de redução. Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 5x + 5z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - (1 - x) = 1 \\ z = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

IV

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO III

1. Como estamos ainda em fase experimental, é inevitável que surjam numerosas hesitações quanto à escolha e à ordenação dos assuntos. Uma dessas hesitações verificou-se no estudo das *partições associadas a relações de equivalência.* Não nos pareceu (e não nos parece ainda) oportuno fazer no 6.º ano o estudo rigoroso deste assunto, com a demonstração do teorema que estabelece a ligação entre relações de equivalência e partições de conjuntos. Mas agora, com a perspectiva que já possuímos após dois anos de experiência, parece-nos que se impõe no 6.º ano um estudo heurístico-intuitivo do referido assunto, *o que aliás pode e deve ser feito em anos anteriores.*

Segundo a orientação heurística, esse estudo deve partir de exemplos tão sugestivos e familiares quanto possível. Para começar, poderá considerar-se um conjunto T de alunos e as respectivas notas no exame de matemática do 5.º ano. Seja

$$T = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

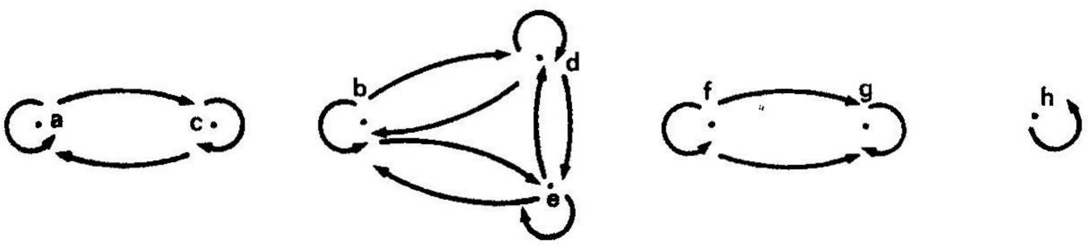
e suponhamos que estes alunos tiveram as notas indicadas na seguinte lista:

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 13 & 10 & 13 & 10 & 10 & 12 & 12 & 11 \end{array}$$

Consideremos agora a relação definida em T, a partir desta lista, pela seguinte expressão:

X teve a mesma nota que Y

Para construir o diagrama desta relação, convirá *agrupar* os alunos segundo as notas que tiveram:



O diagrama desde logo evidencia que se trata de uma relação de equivalência e que, por efeito desta relação, os alunos são *divididos (ou repartidos)* em quatro conjuntos:

$$A = \{a, c\} \quad , \quad B = \{b, d, e\} \quad , \quad C = \{f, g\} \quad , \quad D = \{h\}$$

Estes conjuntos são chamados *classes de equivalência* correspondentes à relação ρ considerada.

O aluno observará que:

1.º — *As classes de equivalência não são conjuntos vazios.*

2.º — *A reunião das classes de equivalência é o conjunto dado* T, *isto é:*

$$T = A \cup B \cup C \cup D$$

3.º — *As classes de equivalência são disjuntas duas a duas, isto é:*

$$A \cap B = \varnothing \quad , \quad A \cap C = \varnothing \quad , \quad A \cap D = \varnothing \quad , \quad B \cap C = \varnothing,$$
$$B \cap D = \varnothing \quad , \quad C \cap D = \varnothing$$

Por outro lado, verificará que:

Dois elementos x, y *de* T *verificam a relação* ρ, *sse* x, y *pertencem à mesma classe de equivalência.*

Um segundo exemplo poderá ser dado pela relação

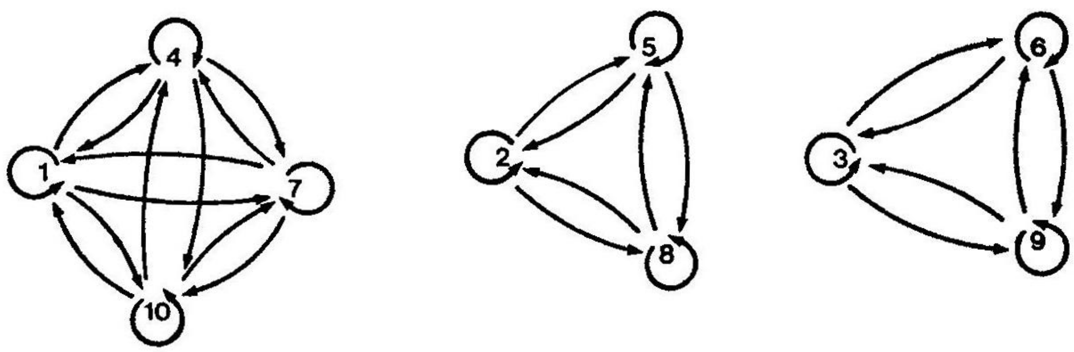
$$x \equiv y \pmod 3$$

restringida ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Adopte-se a definição:

Diz-se que x *é congruente com* y *módulo* 3, *e escreve-se* $x \equiv y \pmod 3$, *sse* x *e* y *divididos por* 3 *dão restos iguais.*

Tem-se então o diagrama:



e as *classes de equivalência:*

$$A = \{1, 4, 7, 10\} \quad , \quad B = \{2, 5, 8\} \quad , \quad C = \{3, 6, 9\}$$

As conclusões são inteiramente análogas às anteriores.

Um terceiro exemplo poderá ser constituído pela relação «X é semelhante a Y» restringida a um conjunto constituído por um certo número de figuras geométricas (p. ex. quadrados, círculos, triângulos equiláteros e rectângulos), de diferentes dimensões, que se apresentem desenhados na pedra ou num cartão. Ainda neste caso as conclusões serão análogas.

Convirá também apresentar o exemplo da *relação lógica de identidade* num conjunto qualquer $U = \{a, b, c, d, e\}$. Neste caso o diagrama é

e as classes de equivalência reduzem-se aos conjuntos *singulares* $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$, $D = \{d\}$, $E = \{e\}$.

Até aqui foram apresentados apenas exemplos em *universos finitos*. Passando a considerar *universos infinitos*, podemos tornar ao exemplo da relação $x \equiv y \pmod 3$ no universo $\mathbb{N}$. Neste caso, temos apenas três classes de equivalência, mas qualquer delas é um conjunto infinito:

$$C_0 = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 3n, \ \ldots\}$$
$$C_1 = \{1, 4, 7, 10, \ldots, 3n + 1, \ldots\}$$
$$C_2 = \{2, 5, 8, 11, \ldots, 3n + 2, \ldots\}$$

Exemplos análogos são dados pelas relações

$$x \equiv y \pmod 4 \quad , \quad x \equiv y \pmod 5, \text{ etc.}$$

Um segundo exemplo em universo infinito pode ser o da *relação de semelhança, no universo das figuras geométricas (isto é, conjuntos de pontos do espaço usual)*. Agora, temos uma infinidade de classes de equivalência, cada uma das quais é formada por uma infinidade de figuras. Por exemplo, a classe de equivalência a que pertence um dado triângulo é *o conjunto de todos os triângulos que são semelhantes a esse*, a classe de equivalência a que pertence um quadrado é *o conjunto de todos os quadrados*, etc., etc. Recordemos agora a seguinte definição:

> Diz-se que duas figuras geométricas *têm a mesma forma*, sse são semelhantes.

Note-se bem: não se define aqui explicitamente o significado do substantivo 'forma', apenas se introduz a expressão 'ter a mesma forma' como sinónimo de 'ser semelhante' (propriedades relativas). Uma *definição explícita de 'forma'* poderia ser a seguinte, que muitos autores modernos adoptam:

> Chama-se *'forma duma figura geométrica'* ao conjunto de todas as figuras que lhe são semelhantes (classe de equivalência).

Por exemplo, segundo esta definição, a forma dum quadrado é o conjunto de todos os quadrados, a forma dum triângulo rectângulo isósceles é o conjunto de todos os triângulos rectângulos isósceles, etc.

É claro que esta definição está de acordo com a anterior: é uma das suas possíveis *explicitações*. Porém, *não é a mais natural*, a que mais se coaduna com o sentido que, na linguagem vulgar, atribuímos à palavra 'forma'. Na verdade, consideramos usualmente a forma dum corpo como sendo uma *propriedade* (tal como o volume, a cor ou a massa do corpo) e não como o *conjunto* dos corpos que têm essa propriedade. Nesta ordem de ideias:

> Chama-se *'forma duma figura* F' à propriedade que possuem todas as figuras semelhantes a F e só essas.

Em resumo, prefere-se aqui o *ponto de vista da compreensão* ao *ponto de vista da extensão*. Simbolicamente, a definição extensiva apresenta-se do seguinte modo, no universo das figuras geométricas:

$$\text{forma de } F = \{ X\text{: } X \text{ é semelhante a } F \}.$$

Mas, segundo a definição compreensiva, a forma de F é a propriedade absoluta traduzida pela expressão 'X é semelhante a F', supondo F constante e X variável.

Um terceiro exemplo, igualmente importante, é o da *relação de paralelismo no universo das rectas do espaço*. Recordemos a definição:

> Diz-se que *duas rectas têm a mesma direcção* sse são paralelas.

Daqui a definição explícita em termos de extensão:

Direcção duma recta r é o conjunto de todas as rectas que são paralelas a r.

Portanto, segundo esta definição, a direcção duma recta r é a classe de equivalência a que pertence r, segundo a relação de paralelismo. Mas na linguagem corrente prefere-se o ponto de vista da compreensão:

Direcção duma recta r é a propriedade que possuem todas as rectas paralelas a r e só essas.

Um quarto exemplo, que nunca poderá faltar, é a *relação de igualdade geométrica entre segmentos de recta:*

Diz-se que dois segmentos de recta *têm o mesmo comprimento,* sse são geometricamente iguais.

Daqui a definição explícita em termos de extensão:

Comprimento dum segmento $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos de recta que são geometricamente iguais a AB.

Mas o senso comum prefere o ponto de vista da compreensão:

Comprimento dum segmento $\overline{AB}$ é a propriedade que possuem todos os segmentos geometricamente iguais a $\overline{AB}$ e só esses.

A propósito, é necessário lembrar que a *relação de igualdade geométrica* não se confunde com a *relação lógica de identidade.* Para indicar que duas figuras F e G são *idênticas* (ou *coincidentes,* isto é, têm a *mesma* figura), escrevemos

$$F = G$$

Para indicar que F e G são geometricamente iguais, escrevemos

$$F \cong G$$

No entanto, a igualdade geométrica converte-se em identidade, quando passamos dos segmentos de recta para os respectivos comprimentos. O comprimento dum segmento $\overline{AB}$ será representado pelo símbolo $|AB|$. Assim teremos, por definição [1]:

$$\boxed{|AB| = |CD| \Leftarrow AB \cong \overline{CD}}$$

Entretanto é natural que o aluno pergunte:

Qual dos pontos de vista se deve adoptar nas referidas definições: o da extensão ou o da compreensão?

A resposta é esta: *'Pode-se adoptar indiferentemente um ou o outro; mas veremos casos em que já não é indiferente a escolha'.*

Convém ainda notar o seguinte:

As definições como as anteriores em que se definem conjuntos ou propriedades a partir de relações de equivalência são chamadas *definições por abstracção.*

Nesta ordem de ideias, também se diz, por exemplo, que a forma duma figura F é o *abstracto* (ou o *tipo*) das figuras semelhantes a F, etc. (Esta terminologia relaciona-se com a *teoria dos universais ou arquétipos de Platão.)*

No 7.º ano far-se-á um estudo mais aprofundado deste assunto, dando a definição geral de 'partição (ou classificação) dum conjunto' e demonstrando o teorema que estabelece a correspondência entre relações de equivalência e partições. Por agora não convém ir mais longe.

2. A noção de 'número cardinal dum conjunto' é definida a partir da relação de equipotência por um processo de abstracção semelhante aos anteriores:

> Diz-se que dois conjuntos A e B *têm o mesmo número cardinal* (ou *o mesmo número de elementos)*, sse A e B são equipotentes.

---

(1) Há hoje tendência para usar a notação [AB] em vez da notação $\overline{AB}$ para designar o segmento de extremos A e B.

A definição explícita em termos de extensão seria esta:

Número cardinal dum conjunto A é o conjunto de todos os conjuntos equipotentes a A.

Mas tal definição é inaceitável, pelas razões que serão apresentadas adiante, e por isso estará indicada, nesta fase do ensino, a definição em termos de compreensão:

Número cardinal dum conjunto A é a propriedade que possuem todos os conjuntos equipotentes a A e só esses.

Vejamos agora porque é inaceitável a definição extensiva (1). Pergunta-se:

Qual é o universo em que está definida a relação de equipotência?

A resposta virá naturalmente:

'É o conjunto de todos os conjuntos possíveis'.

Acontece porém que não existe tal conjunto, porque a sua existência implicaria indirectamente uma contradição, chamada PARADOXO DE RUSSELL.

Com efeito, suponhamos que existe o conjunto de todos os conjuntos e designemo-lo por $\mathscr{C}$. Então um dos seus elementos será ele próprio, isto é:

$$\mathscr{C} \in \mathscr{C}$$

Já isto é uma anomalia, porque, na definição de um conjunto, não deveria intervir o próprio conjunto definido. Mas admitamos por um momento esta anomalia. Então aparecem-nos duas categorias de conjuntos:

1) *Os conjuntos que são elementos de si mesmo (como* $\mathscr{C}$*).*

2) *Os conjuntos que não são elementos de si mesmo (como normalmente sucede).*

Designemos então por $\mathscr{C}'$ *o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmo (e só esses).* Ora, de duas uma (princípio do 3.º excluído):

Ou $\mathscr{C}'$ é elemento de si mesmo ou não é elemento de si mesmo.

(1) A discussão que vai seguir-se pode ser recomendada como leitura aos alunos mais interessados. Fazê-la na aula talvez não resulte proveitoso.

Suponhamos que $\mathscr{C}'$ é elemento de si mesmo:

$$\mathscr{C}' \in \mathscr{C}'$$

Então o conjunto $\mathscr{C}'$ não seria constituído *só* pelos conjuntos que não são elementos de si mesmo, visto que um dos seus elementos (o próprio $\mathscr{C}'$) é elemento de si mesmo.

Suponhamos que $\mathscr{C}'$ não é elemento de si mesmo:

$$\mathscr{C}' \notin \mathscr{C}'$$

Então $\mathscr{C}'$ não seria o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmo, pois falta lá um desses elementos, que é o próprio $\mathscr{C}'$.

Assim, em qualquer das hipóteses possíveis, chega-se a uma contradição, e é nisto que consiste, precisamente, o PARADOXO DE RUSSELL. Este pode ser apresentado sob formas mais ou menos pitorescas, como por exemplo a do barbeiro:

Existe em certa aldeia um barbeiro, que barbeia todas as pessoas dessa aldeia que não fazem a barba a si mesmo, e só essas pessoas.

Se o barbeiro faz a barba a si mesmo, não barbeia *só* pessoas que não fazem a barba a si mesmo.

Se o barbeiro não faz a barba a si mesmo, não barbeia *todas* as pessoas que não fazem a barba a si mesmo.

Logo não pode existir um tal barbeiro.

B. Russell procurou eliminar o seu paradoxo, obrigando a relação $\in$ a ser anti-reflexiva (isto é, obrigando a condição $X \in X$ a ser impossível) e introduzindo a teoria dos tipos lógicos. Mas esta teoria impõe restrições embaraçosas, o que levou os lógicos matemáticos a procurarem solução diferente. Uma das soluções seria:

O ponto de vista da compreensão ultrapassa o da extensão, isto é, existem propriedades às quais não correspondem conjuntos.

Mas esta solução não se afigura suficiente, o que levou certos autores (Church, Von Neumann, etc.) a adoptarem estoutra:

Devemos fazer uma distinção entre os conceitos de 'conjunto' e de 'classe', de acordo com certas regras, como por exemplo a seguinte: todo o conjunto é uma classe, mas nem toda a classe é um conjunto ([1]).

([1]) Note-se porém que é mantido o conceito de tipo lógico: existem conjuntos de indivíduos (conjuntos de tipo 1), conjuntos de conjuntos de tipo 1 (conjuntos de tipo 2), etc.

Segundo este ponto de vista, o universo em que é definida a relação de equipotência é a *classe de todos os conjuntos possíveis* e a definição de cardinal de um conjunto pode ser dada extensivamente do seguinte modo:

> *Número cardinal de um conjunto* A é a classe de todos os conjuntos equipotentes a A.

Deve ainda notar-se que, quando o universo é uma classe mas não um conjunto, há propriedades que não definem conjuntos nesse universo.

3. Para alunos do 6.º ano, a noção de número cardinal deve ser introduzida de maneira tão intuitiva quanto possível, como se faz no *Compêndio.* A expressão 'correspondência biunívoca entre dois conjuntos A e B' aparece antes das expressões equivalentes 'aplicação biunívoca de A sobre B' e 'bijecção de A em B', que estão agora muito em moda, mas que, por serem mais estranhas ao aluno, prejudicam o carácter intuitivo e natural que convém imprimir a esta introdução.

Pela mesma razão, reserva-se para o Capítulo IV a demonstração de algumas propriedades intuitivas, tais como as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da equipotência. E, mesmo no Capítulo IV, a demonstração dessas propriedades deve ser apenas aconselhada, *em leitura*, aos alunos mais interessados.

Pelo contrário, deve recorrer-se nesta fase a imagens bastante sugestivas, como por exemplo algumas gravuras dos cadernos *Sets and numbers* do Prof. Suppes para o ensino primário. Não esquecer que nesses cadernos o símbolo de número cardinal é a letra N e que o símbolo $\subset$ exprime aí *inclusão estrita*, enquanto na nossa orientação exprime *inclusão lata* (podemos indicar a inclusão estrita com o símbolo $\underset{\neq}{\subset}$).

Convém chamar a atenção do aluno para o facto de que a noção de número cardinal se pode aplicar também a conjuntos de números. Por exemplo:

$$\# \{2, 3, 5\} = 3 \quad , \quad \# \{3\} = 1 \quad , \quad \text{etc.}$$

O que é o número 3? Podemos dizer, por exemplo: *é a propriedade que possuem todos os conjuntos equipotentes ao con-*

junto { Terra, Sol, Lua } *e só esses conjuntos*. Em vez do conjunto { Terra, Sol, Lua }, podíamos indicar o conjunto { Lisboa, Porto, Coimbra }, o conjunto { dó, ré, mi }, o conjunto { Lusíadas, Hidrogénio, 9.ª Sinfonia de Beethoven }, etc., etc. Todos esses são representantes da mesma *classe de equivalência* (do mesmo modo que, por exemplo, vários segmentos com um metro de comprimento representam o comprimento *metro* ou várias moedas de um escudo representam o valor monetário *escudo*).

Mas não podemos definir o número 3 como sendo a propriedade que possuem os conjuntos equipotentes a { 2, 3, 5 }, *porque na definição não deve entrar o definido*.

4. Convém aproveitar esta oportunidade para mostrar mais uma vez ao aluno que não se pode confundir um ente com o conjunto singular formado por esse ente. Por exemplo, se

$$A = \{ \text{Lisboa, Porto, Coimbra} \},$$
$$B = \{ \text{Tejo, Douro, Mondego} \},$$

tem-se

$$\# A = 3 \quad , \quad \# B = 3 \quad , \quad \# \{ A , B \} = 2$$

mas

$$\# \{ A \} = 1 \quad , \quad \# \{ B \} = 1,$$

o que mostra ser $A \neq \{ A \}$ e $B \neq \{ B \}$.

5. O estudo das operações e da relação de grandeza entre números inteiros pretende estabelecer a transição

$$\text{intuitivo} \rightarrow \text{racional}$$

que se deve fazer progressivamente em todo o ensino da matemática, procurando reproduzir a marcha seguida na investigação. Só no 7.º ano se deverá estruturar uma aritmética inteiramente racional, a partir de uma axiomática independente da teoria dos conjuntos, e só nesse momento irá aparecer o MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA.

Mas o professor deverá ser exigente e intransigente com o aluno naquelas poucas demonstrações que aparecem desde já com carácter rigoroso.

Aliás, para estimular mais uma vez o brio do aluno, o professor deve mostrar-lhe como é feito o estudo das operações e da relação de grandeza no ensino primário segundo o método Suppes, em que o aluno tem de saber justificar a técnica das operações que efectua.

6. Os cardinais infinitos só deverão ser tratados, *se a turma não estiver atrasada.*

Se, pelo contrário, a turma estiver bastante adiantada e os alunos revelarem interesse, pode-se ir até um pouco mais longe do que no *Compêndio,* demonstrando os dois seguintes factos:

1) *O conjunto dos números racionais é equipotente a* $\mathbb{N}$, *isto é:*

$$\# \mathbb{Q} = \# \mathbb{N}$$

2) *O cardinal de* $\mathbb{R}$ *(chamado 'potência do contínuo') é superior ao de* $\mathbb{N}$, *isto é:*

$$\# \mathbb{N} < \# \mathbb{R}$$

No primeiro caso, bastará considerar os racionais positivos e seguir o método de Cantor. Começa-se por colocar em *primeiro lugar* a fracção cujos termos somam 2; em *segundo lugar* as fracções cujos termos somam 3, por ordem crescente dos numeradores; em *terceiro lugar* as fracções cujos termos somam 4, por ordem crescente dos numeradores; e assim sucessivamente:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Em seguida reduzem-se as fracções à sua expressão mais simples, suprimem-se os denominadores 1 e eliminam-se as fracções repetidas. Deste modo se estabelece uma correspondência biunívoca entre os números naturais e os números racionais positivos:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & \ldots
\end{array}$$

Há, pois, tantos números racionais positivos quantos números naturais, ao contrário do que a intuição sugere.

Quanto à proposição 2), bastará provar que o conjunto $]\,0, 1\,[$ dos números reais entre 0 e 1 tem potência superior à de $\mathbb{N}$. Para isso, terá de seguir-se, como faz Cantor, o método de redução ao absurdo. Suponhamos que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e aquele conjunto. Designemos então em geral por α_n o número real do intervalo] 0, 1 [correspondente ao número natural *n*, qualquer que este seja. Ora já sabemos que cada um desses números é representado por uma dízima infinita normal (periódica ou não), tal como se indica no quadro seguinte:

$$
\begin{array}{l}
1 \leftrightarrow \alpha_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1m}\ \ldots \\
2 \leftrightarrow \alpha_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2m}\ \ldots \\
3 \leftrightarrow \alpha_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \ldots\ a_{3m}\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n \leftrightarrow \alpha_n = 0,\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ \ldots\ a_{nm} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Assim, como se vê, indica-se dum modo geral com a letra a_{nm} o algarismo decimal de ordem *m* da dízima que representa α_n. Segundo a hipótese, *todos* os números reais do intervalo] 0, 1 [figuram nesta lista. Ora vamos ver que *existe pelo menos um número real deste intervalo que não figura nesta lista.* Seja b_1 um número dígito diferente de a_{11}, seja b_2 um número dígito diferente de a_{22}, etc. Dum modo geral, seja b_{nu} um número dígito diferente de a_{nn}. Então o número real

$$\beta = 0,\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n$$

pertence ao intervalo] 0, 1 [e é diferente de α_1 porque $b_1 \neq a_{11}$, é diferente de α_2 porque $b_2 \neq a_{22}$, etc. Dum modo geral, tem-se $\beta \neq \alpha_n$ porque $b_n \neq a_{nn}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Chegámos assim a uma contradição, resultante de termos suposto que o conjunto dos números reais do intervalo] 0, 1 [é equipotente a $\mathbb{N}$. E, como $\mathbb{N}$ é equipotente a uma parte daquele conjunto, segue-se que o cardinal de $\mathbb{N}$ é inferior ao do referido conjunto.

Há portanto mais números reais que números naturais, isto é, $\# \mathbb{N} < \# \mathbb{R}$.

Estas demonstrações têm, além de outros, o mérito de chamar fortemente a atenção do aluno para a diferença entre os conceitos de número real e de número racional.

7. O aluno manifesta geralmente muito interesse pelas questões de cálculo combinatório, apesar de não ver logo a utilidade deste assunto. *Vê-la-á mais tarde, ao estudar o cálculo das probabilidades.* É possível que se venha a reconhecer, *no futuro*, a vantagem de fazer uma bifurcação após este capítulo, dedicando 3 horas semanais ao cálculo das probabilidades e as outras três horas aos assuntos que seguem no Capítulo III no *Compêndio.*

É preciso não perder de vista que a ordem didáctica mais aconselhável (tal como a ordem lógica) não é uma ordem total, mas apenas uma ordem parcial; e que impor sistematicamente, arbitrariamente, *a ordem total, pode ter inconvenientes sérios.*

8. O estudo da fórmula do binómio deve reservar-se para o Capítulo VI. Entretanto há um assunto que convém tratar já: *o dos sistemas de numeração,* principalmente pela enorme importância que tem assumido modernamente o sistema de base 2.

Deve-se aproveitar esta oportunidade, para insistir na distinção entre *designação* e *designado.* Uma coisa é a *expressão decimal* 237, outra coisa é o *número* designado por essa expressão. Aliás, o mesmo número pode ser designado pela expressão 11101101 na base dois, isto é:

$$237 = 111011011_{(2)}$$

Os autores de língua inglesa costumam distinguir entre 'number' e 'numeral', usando o primeiro termo para *números* e o segundo para *nomes de números.* Aliás, em português também se usa neste caso em gramática a expressão 'nome numeral' ou simplesmente 'numeral', que pode perfeitamente ser transposta para a matemática com o mesmo significado. Recordemos ainda que em gramática se distinguem:

1) os *numerais cardinais* — nomes de números cardinais;

2) os *numerais ordinais* — aplicáveis a números ordinais (1.º, 2.º, 3.º, etc.);

3) *os numerais multiplicativos e os partitivos* — nomes de números racionais (por exemplo, 'o dobro', 'o triplo', 'a metade', $\frac{'2'}{3}$, $\frac{'3'}{5}$, etc.).

A técnica das operações em sistemas de base diferente de dez (nomeadamente na base dois) deve ser justificada de modo intuitivo e directo, com exemplos numéricos *simples*.

E é agora chegado o momento de dar uma ideia de *como os computadores electrónicos efectuam a adição e a multiplicação no sistema binário, a partir das operações lógicas no conjunto* $\{0, 1\}$.

Designemos por $x \dot{+} y$ a disjunção ou soma lógica exclusiva de x e y; e por xy a conjunção ou produto lógico de x e y. Temos assim as duas seguintes tabuadas:

$x \dot{+} y$

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	0

xy

x \ y	0	1
0	0	0
1	0	1

Utilizaremos ainda as duas seguintes *operações ternárias* (isto é, com três dados), derivadas das anteriores:

$S = x \dot{+} y \dot{+} z$ *(operação de soma exclusiva)*
$T = xy \dot{+} xz \dot{+} yz$ *(operação de transporte)*

Suponhamos que se trata de somar os números

$$\begin{array}{c} 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{array}$$

no sistema binário.

Tem-se, na primeira coluna a contar da direita: $1 + 1 = 10$. O último algarismo de 10 é dado pela soma lógica exclusiva: $1 \dot{+} 1 = 0$. O algarismo 1 a *transportar* é dado pelo produto lógico: $1 \cdot 1 = 1$.

Este algarismo é depois somado aos da segunda coluna (sempre a contar da direita), o que dá: $1 + 1 + 1 = 11$. O último algarismo de 11 é dado pela operação de soma exclusiva:

$$S = 1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 = 1$$

O algarismo da esquerda de 11 é dado pela operação de transporte:

$$T = 1 \cdot 1 \dot{+} 1 \cdot 1 \dot{+} 1 \cdot 1 = 1$$

Este irá para a coluna seguinte, onde teremos agora

$$S = 1 \dotplus 0 \dotplus 0 = 1 \quad , \quad T = 1 \cdot 0 \dotplus 1 \cdot 0 \dotplus 0 \cdot 0 = 0$$

e assim sucessivamente. Deste modo, o computador acaba por calcular a soma dos números por meio de operações lógicas elementares:

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,0\,1\,1 \\ +\,1\,0\,1\,0\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0 \end{array}$$

Para multiplicar dois números escritos no sistema binário, o computador segue a regra usual da multiplicação neste sistema, utilizando a tabuada da multiplicação no conjunto $\{0, 1\}$ e somando sucessivamente os produtos parciais deslocados sucessivamente de uma casa para a esquerda. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1\,1\,0 \\ \times\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,1\,1\,0 \\ \hline 1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0 \end{array}$$

Apesar de trabalharem fundamentalmente no sistema binário, os computadores electrónicos recebem os dados e fornecem os resultados no sistema decimal, mediante um mecanismo adequado de conversão. Convém ainda que o aluno tome conhecimento dos seguintes factos:

1) *Os mais potentes computadores electrónicos efectuam cerca de um milhão de adições por segundo e cerca de trezentas mil multiplicações por segundo, com números de 12 algarismos decimais. Assim, um sistema de 100 equações lineares com 100 incógnitas, que dantes levaria anos a resolver, pode agora ser resolvido em cerca de 5 segundos.*

2) *Os computadores efectuam não só cálculos, mas também raciocínios, e estão a substituir cada vez mais o homem em toda a espécie de trabalho intelectual* de rotina, *em fábricas, minas, laboratórios, estabelecimentos bancários, etc., etc. Entrámos na* Era da Automação, *em que o trabalho monótono do homem acabará por ser quase todo feito pela máquina.*

3) *A sonda espacial enviada pelos Estados Unidos para exploração do planeta Marte forneceu todas as informações, inclusive fotografias da superfície marciana, em código binário, que foi depois rapidamente traduzido na Terra por computadores.*

4) *As dimensões e o consumo de energia dos computadores diminuiu consideravelmente, depois que se tornou possível substituir as válvulas electrónicas por transístores.*

5) *Dois dos grandes matemáticos que mais contribuíram para o desenvolvimento dos computadores (J. Von Neumann e Norbert Wiener) abriram igualmente caminho a um novo método de estudo do sistema nervoso e da psicologia, em que os neurones são equiparados a elementos de circuitos lógicos. Assim nasce uma nova ciência: a* neurocibernética.

V

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO IV

1. Na introdução do conceito de aplicação (ou função) discordámos da maioria dos autores modernos *para o ensino secundário*, não só pelas razões de ordem lógica que são expostas na nota da página 214 do 1.º tomo do *Compêndio*, mas ainda por outras razões, especialmente de ordem didáctica.

Para os referidos autores, uma função (de uma variável) nada mais é do que uma relação binária R, funcional na 2.ª variável, isto é, tal que

$$\forall x \in D, \ \exists^1 y : x \, R \, y,$$

em que D é o domínio da função. Pode, desde logo, perguntar-se:

Porquê funcional na segunda variável e não na primeira?

Esta convenção artificial conduz a distorções da linguagem natural, que nos parecem não só inúteis, mas até opostas à fácil assimilação dos assuntos. Por exemplo, diz-se sistematicamente

x *tem por pai* y

em vez de

y *é o pai de* x

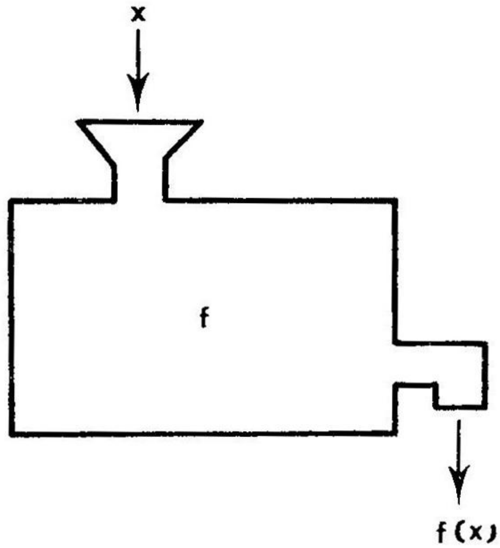
como seria muito mais natural e explícito (o artigo definido 'o' está a indicar precisamente que *só existe um pai de* x, para todo o indivíduo x). Para quê privar a linguagem comum daquilo que tem, precisamente, de mais útil e significativo? *Apenas para que a relação se possa chamar uma função.* Nesta ordem de ideias, nunca mais deveríamos escrever daqui por diante

$$y = f(x) \quad \text{mas apenas} \quad f(x) = y,$$

o que seria o cúmulo do dogmatismo bizantino! Seria como querer obrigar as pessoas a olharem só para a direita e nunca para a esquerda...

E tudo isto, porque se pretende evitar a noção de *correspondência* como noção primitiva, do mesmo modo que se pretende reduzir a noção de *par ordenado* à de conjunto de tipo 2. Trata-se, a nosso ver, de um purismo lógico exagerado, ilusório e bastante nocivo do ponto de vista didáctico. A noção de correspondência é afinal bastante intuitiva; pode e deve ser usada sem qualquer temor de impureza.

2. O conceito de função pode aparecer psicologicamente sob diferentes aspectos. Um desses aspectos é o da *operação* (ou *transformação)*, que faz passar do *dado* para o *resultado*. Neste sentido, a imagem mais adequada para o conceito de função é a de uma máquina que recebe o dado e, *após algum tempo*, fornece o resultado (a figura junta foi copiada do livro de *Cálculo* de Apostol).



Um exemplo humorístico é o da máquina de fazer chouriços, das quais se diz que entra por um lado o porco e saem por outro os chouriços...

Um exemplo real e actual é o dos computadores, em que os dados entram sob a forma de programa e os resultados saem, ao fim de algum tempo, escritos à máquina sobre uma fita ([1]). Não esquecer que há operações com mais de um dado (funções de mais de uma variável), das quais nos ocupamos no Capítulo V.

Observe-se que a ideia de *tempo* é inerente à de operação: *o dado antecede no tempo o resultado*. Quando, por exemplo, se dá a um aluno a expressão '3 × 0,75' para calcular, ele escreverá a seguir '= 2,25'.

([1]) Embora estas considerações se dirijam ao professor, podem ser em parte aproveitadas por este para animar o ensino. O professor deve aproveitar todos os pretextos para tornar o ensino vivo, atraente e alegre, sabendo usar o sentido do humor sem quebra de disciplina. Há muitos animais que choram (até os crocodilos...), mas, que saibamos, o homem é o único animal que ri.

Mas a ordem pode ser invertida, especialmente quando se trata de definir um símbolo ou termo novo. Exemplos:

π = razão entre o comprimento duma circunferência e o do respectivo diâmetro.

$\aleph_0$ = número cardinal de $\mathbb{N}$.

Energia cinética dum ponto material = metade do produto da massa pelo quadrado da velocidade do ponto.

3. Um outro aspecto sob o qual aparece o conceito de função é o da definição clássica, isto é, como *dependência funcional entre variáveis.*

O caso mais simples é o das expressões designatórias, como as dos exemplos da página 173 do 1.º tomo (o exemplo das províncias de Portugal pode ser indicado apenas para leitura).

Mas os casos mais sugestivos — e também os mais importantes — são os que se apresentam na geometria, na física e em outras ciências. Por exemplo, diz-se:

O volume duma esfera é função do raio da esfera.

O que quer isto dizer? Na realidade, o *volume duma esfera* E e o *raio dessa esfera* são já funções de E, que podemos designar respectivamente por v(E) e r(E). A frase anterior é apenas uma abreviatura da seguinte:

Existe uma função f *que transforma* r(E) *em* v(E), *isto é, tal que*

$$v(E) = f(r(E)) \quad , \quad \forall E$$

É para brevidade de linguagem que escrevemos apenas

$$v = f(r)$$

e dizemos que a *variável* v *é função da variável* r. Aliás, no mesmo sentido se pode dizer que r é função de v (função inversa).

Significado análogo tem a frase:

O volume dum gás é função da pressão e da temperatura a que está sujeito o gás.

(Neste caso, o volume, a pressão e a temperatura são funções do gás e do tempo t.)

IMPORTANTE:

O aluno médio não estará talvez ainda em condições de ir até ao fundo desta análise lógica. Mas o que não oferece dúvidas é *que o aluno necessita absolutamente de se familiarizar com este tipo de linguagem, de modo intuitivo, tal como se faz no* Compêndio de Álgebra *adoptado, cuja leitura neste ponto se aconselha na pág. 240 do texto experimental,* após ter introduzido as noções que se apresentam em números anteriores.

Se não se habituar desde muito cedo o aluno a essa linguagem de tipo intuitivo, deliberadamente pouco rigorosa, *corre-se o risco de criar nele inibições graves, tornando-o escravo de uma matemática* bacteriologicamente pura, *que o inibe de qualquer aplicação — de todo o contacto com o mundo exterior a essa perfeição platónica. Isso é grave, sobretudo entre nós, onde o divórcio entre a matemática e as suas aplicações tem sido quase completo, não só no liceu, como na universidade.*

É preciso que o aluno adquira os conceitos com todo o rigor possível. Mas é também necessário que se habitue depois, de maneira consciente, aos abusos cómodos de linguagem, *sem os quais a matemática se tornaria insuportável e incompreensível.*

4. Consideremos o exemplo do volume dum gás como função da pressão a que está sujeito, a uma dada temperatura. Suponhamos que essa função é dada pela fórmula:

$$v = \frac{1{,}25}{p},$$

sendo, por exemplo, v a medida do volume em litros e p a medida da pressão em atmosferas. Da fórmula anterior resulta uma infinidade de implicações. Por exemplo:

$$p = 1 \Rightarrow v = 1{,}25 \quad , \quad p = 2 \Rightarrow v = 0{,}625$$
$$p = 4 \Rightarrow v = 0{,}3125 \quad , \quad p = 5 \Rightarrow v = 0{,}25 \quad , \quad \text{etc.}$$

Abreviadamente, podemos escrever

$$1 \hookrightarrow 1{,}25 \quad , \quad 2 \hookrightarrow 0{,}625$$
$$4 \hookrightarrow 0{,}3125 \quad , \quad 5 \hookrightarrow 0{,}25 \quad , \quad \text{etc.,}$$

em que o sinal $\hookrightarrow$ indica correspondência (por exemplo, a expressão $1 \hookrightarrow 1{,}25$ pode ler-se 'a 1 corresponde 1,25').

Assim, nestes casos, como noutros de dependência funcional, *a correspondência é, no fundo, uma implicação sob forma abreviada.*

Note-se que a função anterior exprime uma lei de carácter empírico. *É indispensável que o aluno fique bem consciente de que as leis das ciências experimentais têm sempre carácter contingente e aproximado, quer dizer: os valores* teóricos *dados pelas fórmulas são mais ou menos próximos dos valores* observados, *mas não coincidem necessariamente com estes. Aliás, é preciso não esquecer que as próprias medidas das grandezas físicas são sempre aproximadas, nunca exactas.*

Haveria muito interesse em fazer exercícios em que, num gráfico se apresentassem, por um lado, uma função como a anterior, referente a uma lei física, e, por outro lado, se representassem pares de valores observados das variáveis que intervêm nessa lei (tirados por exemplo dum trabalho experimental, com a ajuda do professor de físico-químicas ou do professor de ciências naturais). O aluno verificaria então que os pontos representativos desses pares não se encontram geralmente sobre o gráfico da função, embora deste se aproximem mais ou menos. Em estatística matemática estudam-se métodos de ajustamento, *pelos quais se escolhe a recta ou curva de tipo determinado que melhor se* ajusta *ao conjunto dos pontos marcados* (regressão linear ou não linear).

Como mínimo dos mínimos, o professor deveria pelo menos mostrar ao aluno alguns desses gráficos já desenhados.

IMPORTANTE:

Alguns alunos da alínea g) (ciências económico-financeiras) alegam que os exemplos de física apresentam para eles dificuldade e pouco interesse, uma vez que a disciplina de Físico-Química não é para eles obrigatória. É preciso esclarecê-los, dizendo que os conhecimentos de física exigidos por tais exemplos são extremamente elementares e fazem parte da cultura geral do homem do século XX. Durante muito tempo, desde Newton, a física e análise infinitesimal foram irmãs siamesas e ainda hoje, após a operação que as separou no século passado, não se sabe ao certo onde acaba a física e onde começa a matemática. Deste modo, prescindir dos exemplos da física, é privar a matemática de uma das suas mais ricas fontes de intuição e é portanto, em grande parte, *esterilizar o ensino da matemática.*

No entanto, o professor deve, em relação a esses alunos, ter o cuidado de explicar mais minuciosamente esses exemplos, atendendo a que, desgraçadamente, o ensino da física está reduzido quase a zero no 2.º ciclo dos nossos liceus, *apesar de se ter iniciado, há 20 anos, a Era Atómica.*

5. Até ao n.º 17 deste capítulo é feito o estudo geral das funções, no aspecto operatório, e só depois, como se indica no n.º 18, se deve passar ao estudo das funções reais de variável real, com aplicação às ciências experimentais.

O professor deve dedicar especial atenção às demonstrações (na verdade bem poucas são). Quanto à demonstração da associatividade do produto de aplicações f, g, h poderá limitar-se ao caso simples em que o domínio de f contém o contradomínio de g e o domínio de g contém o contradomínio de h, o que desde logo elimina a questão dos domínios, que é a parte mais delicada da demonstração.

Mas, para alunos de excepção, convém aconselhar a leitura da demonstração no caso geral.

6. Nos exemplos apresentados recorre-se muitas vezes a operadores tais como *o dobro, o triplo, a metade, um terço,* etc. Estes operadores e os respectivos produtos, em qualquer ordem, são afinal os *números racionais positivos,* quando aplicados a grandezas tais como comprimentos, volumes, massas, tempos, etc. Está-se a fazer, deste modo, uma preparação psicológica para a *teoria dos números reais como operadores,* que há-de ser estruturada logicamente no 7.º ano. As designações dos números racionais positivos são os *numerais multiplicativos-partitivos,* já atrás mencionados e que convém a princípio escrever por extenso. Ao passar para as respectivas abreviaturas simbólicas — que são as *fracções* — impõe-se mais uma vez salientar que *uma coisa é uma fracção e outra coisa é um número designado por essa fracção.* Por exemplo, as fracções $\frac{3}{4}$ e $\frac{75}{100}$ são equivalentes, isto é, designam o *mesmo número* (fraccionário), mas *não são a mesma fracção,* isto é, tem-se

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100}, \text{ mas não } \frac{'3'}{4} = \frac{'75'}{100}$$

A segunda é redutível, enquanto a primeira é irredutível — o que não faz sentido dizer dum número fraccionário.

Analogamente, as fracções $\frac{12}{4}$ e $\frac{3}{1}$ são equivalentes, isto é, representam o mesmo número (inteiro), etc.

Será também muito importante salientar que o *produto de números racionais é definido como produto de operadores.* Exemplos:

metade *de* um terço = um sexto $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\right)$

três quartos *de* dois quintos = três décimos $\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}\right)$

Neste caso, a preposição *de* traduz-se por '×' (vezes).

Há alunos que chegam ao 6.º ano sem conhecerem o significado da multiplicação de números racionais!

Nunca é de mais insistir no estudo comparativo entre a lógica gramatical *e a* lógica matemática, *entre a* linguagem vulgar *e a* lógica matemática, *entre a* linguagem vulgar *e a* linguagem da matemática. *Não devemos esquecer que a matemática é, no fundo, um processo de formalização progressiva da linguagem comum. Isto torna-se bem evidente na iniciação algébrica que é feita no 2.º ciclo.* Pena é que o objectivo fundamental dessa iniciação — o pôr problemas em equação e resolvê-los por esse método — esteja a ser quase completamente ignorado no nosso ensino. *Esta deficiência torna-se ainda mais chocante, quando verificamos que, segundo o método Suppes,* para o ensino primário, *as crianças começam a pôr problemas em equação logo na 1.ª classe.*

VI

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO V

1. As considerações dos n.os 1 e 2 podem ser resumidas para o aluno, reservando-se para esclarecimento do professor a leitura minuciosa desses números.

2. A noção de grupóide desperta bastante interesse nos alunos, sobretudo quando se parte de exemplos. O exemplo recreativo do 'Bailado das Horas' que aparece só na pág. 27 do 2.º tomo, pode ser apresentado logo no n.º 4, atendendo a que se trata de um exemplo muito rico em sugestões. Em vez de considerar os seus elementos como *classes de congruência módulo 12,* é preferível começar por considerá-los como entes arbitrários, nomeadamente rapazes e raparigas, como se indica no texto (de preferência alunos da turma ou seus conhecimentos). Isso não só concretiza bastante mais o exemplo, como prepara o terreno para os conceitos de isomorfismo e de identidade de estruturas, que serão dados mais adiante. É claro que o próprio exemplo conduzirá às referidas classes de congruência (em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{Z}$), como elementos de uma das possíveis concretizações desta estrutura.

Um exercício entre muitos:

Determinar o número total de grupóides que é possível definir com o conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Trata-se, é claro, de achar o número total de aplicações de $\{1, 2, 3\}^2$ em $\{1, 2, 3\}$, número esse muito elevado ($3^9 = 19683$).

3. Podem imaginar-se diversos modelos para concretizar o conceito de grupóide. Convém que tais modelos se aproximem, mais ou menos, de máquinas de calcular.

Seja, por exemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e seja θ a operação definida pela tabela seguinte:

$x \ \theta \ y$

x \ y	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	3	1
4	1	4	1	4

Um modelo muito simples para este grupóide pode ser construído com dois cartões como vão a seguir indicados.

1				
	1	1	1	1
2				
	1	2	3	4
3				
	1	3	3	1
4				
	1	4	1	4

Operação θ

$\square$

1 2 3 4

$\square$ $\square$ $\square$ $\square$

É comutativa?

É associativa?

No segundo cartão são abertas 5 *janelas*. A da esquerda, isolada, destina-se a mostrar o *primeiro dado*. As restantes quatro são encimadas pelos valores do *segundo dado* e destinam-se a mostrar os correspondentes resultados.

O primeiro cartão deve deslizar verticalmente por trás do segundo, entre dois encaixes laterais. Se as posições relativas das janelas estiverem bem calculadas, a *máquina* executará correctamente a operação θ. Por exemplo, quando à janela da esquerda aparecer o número 3 (primeiro dado), deverão aparecer 1, 3, 3, 1, respectivamente, por baixo de 1, 2, 3, 4 (valores do segundo dado).

Podem construir-se modelos deste tipo para vários grupóides, o que contribuirá, certamente, para animar o ensino e torná-lo mais eficiente.

É claro que também se podem concretizar, com tais modelos, operações para as quais o conjunto dado não é um grupóide. É o que sucede, por exemplo, com as operações de adição e multiplicação no conjunto dos números dígitos. *Conviria até começar por estes dois exemplos familiares, em que as tabelas são as tabuadas usuais da adição e da multiplicação.*

4. Quando uma operação é dada por uma tabela, é muito fácil verificar se ela é comutativa ou ainda se tem elemento neutro ou se é reversível; mas é fastidioso, nesse caso, verificar directamente se a operação é associativa. O problema pode amenizar-se bastante, por meio dum isomorfismo, *como veremos mais adiante.*

5. O conceito de isomorfismo tem importância primacial na matemática moderna. Tudo o que neste capítulo se refere a isomorfismos pode ser assimilado com interesse pelos alunos, desde que o ensino seja bem conduzido. A equipa guiada pelo Prof. Suppes consegue transmitir estas noções, com êxito, a *alunos de* 10-11 *anos,* mediante exemplos adequados (de carácter elementar, bem entendido).

Um exemplo bastante eficaz, que convém explorar a fundo, é o do 'Bailado das Horas'.

Um exemplo ao mesmo tempo eficaz e utilíssimo é o que se desenvolve através de todo o capítulo, como *leit-motiv,* até final: o da *função exponencial e sua inversa.* Este isomorfismo — que só por si justifica todo o estudo geral que se faz sobre tal conceito — acabará por ser concretizado, de maneira excelente, com o uso da régua de cálculo, que é um exemplo notável de associação da teoria com a prática.

6. Quando dois grupóides (A, θ) e (B, Φ) são dados por tabelas, é bem fácil verificar se uma aplicação f de A sobre B é ou não um isomorfismo. Basta substituir cada elemento x de A, em todos

os lugares da tabela de θ pelo correspondente elemento f(x) de B: a aplicação f será um isomorfismo, sse a operação definida pela tabela assim formada coincide com Φ.

Seja, por exemplo, A = { – 1, – 1 } , B = {0 , 1 }, e consideremos os grupóides (A, ·) e (B, $\dotplus$) com as operações definidas pelas tabelas seguintes:

x · y

$y \backslash x$	– 1	1
– 1	1	– 1
1	– 1	1

x $\dotplus$ y

$y \backslash x$	0	1
0	0	1
1	1	0

Trata-se de saber se a aplicação $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é um isomorfismo de (A, ·) sobre (B, $\dotplus$).

Feita a substituição de – 1 por 1 e de 1 por 0 na primeira tabela, obtém-se a tabela seguinte:

$y \backslash x$	1	0
1	0	1
0	1	0

Ora a operação definida por esta coincide manifestamente com a anterior, $\dotplus$.

Analogamente se vê que a aplicação $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ não é um isomorfismo de (A, ·) sobre (B, $\dotplus$).

7. Vejamos agora como se pode, por meio de um isomorfismo, averiguar se uma operação definida por uma tabela é ou não associativa.

$x \, \theta \, y$

x \ y	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	3	1
4	1	4	1	4

Seja novamente a operação θ considerada no n.º 3, operação definida no conjunto $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. Note-se que, a cada elemento *a* de A, corresponde a aplicação $x \hookrightarrow a\theta x$ do conjunto A em si mesmo, aplicação que podemos designar por S_a. Teremos assim:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = I, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aliás, estas aplicações são bem evidenciadas pelo modelo-máquina descrito no n.º 3.

Formemos, agora, a tabela do produto de aplicações definidas no conjunto $A^* = \{ S_1, S_2, S_3, S_4 . \}$

$x \, \theta \, y$

S \ T	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	S_1	S_1	S_1	S_1
S_2	S_1	S_2	S_3	S_4
S_3	S_1	S_3	S_3	S_1
S_4	S_1	S_4	S_1	S_4

Confrontando esta tabela com a anterior, imediatamente se reconhece que a aplicação $a \hookrightarrow S_a$ é um isomorfismo do grupóide (A, θ) sobre o grupóide $(A^*, \cdot)$. Ora, já sabemos que o produto de aplicações é associativo. Logo, pelo PRINCÍPIO DE ISOMORFIA, a operação θ também é, necessariamente, associativa.

Vejamos um segundo exemplo. Seja, agora, $A = \{1, 2, 3\}$ e seja θ dada pela tabela seguinte:

$x \, \theta \, y$

x \ y	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Então:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, a correspondência $a \hookrightarrow S_a$ é a aplicação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{pmatrix}$ biunívoca do conjunto A sobre o conjunto $A^* = \{S_1, S_2, S_3\}$. *Mas não é um isomorfismo.* Por exemplo, tem-se

$$S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_{1\theta 2} = S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

portanto $S_{1\theta 2} \neq S_1 S_2$. Mais até: $S_1 S_2$ *não pertence a* A^* *e, deste modo,* $(A^*, \cdot)$ *não é sequer um grupóide.*

Podemos nós concluir daqui que a operação θ *não é associativa? Vamos ver que sim, tendo em conta o seguinte teorema,* cuja demonstração pode ser feita ou não na aula, *conforme o estado de adiantamento da turma:*

TEOREMA. *Seja* (A, θ) *um grupóide qualquer. Pondo* $S_a(x) = a\theta x$ *para todo o* $a \in A$, *e* $A^* = \{S_a : a \in A\}$, *suponhamos que a correspondência* $a \hookrightarrow S_a$ *é uma aplicação biunívoca de* A *sobre* A^*. *Nestas condições, a operação* θ *é associativa, sse a aplicação* $a \hookrightarrow S_a$ *é um isomorfismo de* (A, θ) *sobre* $(A^*, \cdot)$.

Demonstração:

a) Se a referida aplicação é um isomorfismo, a operação θ é associativa, em virtude do PRINCÍPIO DE ISOMORFIA, visto que o *produto de aplicações é sempre associativo.*

b) Reciprocamente, *suponhamos que* θ *é associativa.* Vamos provar que a aplicação $a \hookrightarrow S_a$ *é necessariamente um isomorfismo de* (A, θ) *sobre* $(A^*, \cdot)$, isto é, que $S_{a\theta b} = S_a \cdot S_b$, $\forall a, b \in A$.

Com efeito temos, por definição de $S_{a\theta b}$:

$$S_{a\theta b}(x) = (a\theta b)\theta x \quad , \quad \forall x \in A,$$

donde, visto que $(a\theta b)\theta x = a\theta(b\theta x)$,

$$S_{a\theta b}(x) = S_a(S_b(x)) \quad , \quad \forall x \in A$$

e portanto $S_{a\theta b} = S_a, \cdot S_b$.

Este teorema exige a hipótese de *a aplicação* $a \hookrightarrow S_a$ *ser biunívoca* (é óbvio que é sempre uma aplicação de A sobre A*). Vamos ver dois casos em que se verifica a hipótese da biunivocidade:

1.º caso. *O grupóide tem elemento neutro.* Com efeito, se u é elemento neutro de θ, tem-se:

$$a \neq b \Leftrightarrow a\theta u \neq b\theta u \Rightarrow S_a \neq S_b, \quad \forall a \, , \, b \in A$$

2.º caso. *O grupóide verifica a lei do corte.* É fácil fazer a demonstração neste caso.

Assim se conclui, em particular:

COROLÁRIO. *Todo o semigrupo que tenha elemento neutro ou verifique a lei do corte é isomorfo a um semigrupo de aplicações* (também se diz: 'pode ser *realizado* ou *representado* por um semigrupo de aplicações').

É claro que qualquer das hipóteses é sempre verificada por um grupo. Note-se que a representação de grupos por meio de aplicações de outro tipo *tem grande importância em física moderna e em outros ramos da ciência.*

A título de curiosidade, pode ainda registar-se o seguinte teorema:

Um grupóide (A, θ) *que não tenha elemento neutro pode ser sempre prolongado num grupóide* (A', θ') *com elemento neutro, e que é associativo sse o primeiro for.*

Com efeito, basta pôr $A' = A \cup \{ u \}$, onde u é qualquer elemento que não pertença a A, e pôr

$$u\theta' a = a\theta' u = a \quad , \quad \forall a \in A'$$
$$a\theta' b = a\theta b \quad , \quad \forall a,\, b \in A$$

Assim θ' é uma extensão de θ, *u* elemento neutro de θ' e vê-se que θ' é associativa sse θ o for.

Deste modo o anterior método poderá ser sempre aplicado com êxito. E convém ainda notar que os anteriores teoremas são válidos, quer A seja finito quer seja infinito.

8. Já atrás falámos de *numerais cardinais* (nomes de números naturais) e de *numerais multiplicativo-partitivos* (nomes de números racionais positivos). Observe-se agora a correspondência biunívoca:

1	2	3	... n	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	... $\downarrow$	...
o mesmo	o dobro	o triplo	o n-uplo	...

Aqui 'o mesmo' designa o operador identidade $x \mapsto x$, 'o dobro' designa o operador $x \mapsto 2x$, etc. Estes operadores são *números racionais*, postos em correspondência biunívoca com números *naturais*. Ora tal correspondência é um isomorfismo relativamente à multiplicação. Por exemplo, tem-se:

$2 \times 3 = 6$ o dobro do triplo = o sêxtuplo

$3 \times 4 = 12$ o triplo do quádruplo = doze vezes

e assim por diante.

Mais ainda: essa correspondência é também um isomorfismo relativamente à adição. Por exemplo:

$2 + 3 = 5$ o dobro mais o triplo = o quíntuplo

$3 + 4 = 7$ o triplo mais o quádruplo = o séptuplo

É este *duplo isomorfismo* que leva a identificar os números naturais com os correspondentes números racionais, permitindo escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$$

Por um processo análogo se identificam os números absolutos com os correspondentes números relativos (não negativos). Mas isso será tratado a seu tempo.

9. Assim como o conceito de correspondência biunívoca dá origem à *relação de equipotência*, assim também o conceito de isomorfismo dá origem à *relação de isomorfia*. E assim como a relação de equipotência dá origem, por abstracção, ao conceito de *número cardinal*, assim também a relação de isomorfia dá origem ao conceito de *estrutura* (ou forma). Com efeito:

Diz-se que dois conjuntos *têm o mesmo número cardinal*, sse são equipotentes.

Diz-se que dois grupóides *têm a mesma estrutura* (ou a mesma *forma*), sse são isomorfos.

Donde:

Número cardinal dum conjunto A é a propriedade que possuem todos os conjuntos equipotentes a A e só esses.

Estrutura (ou *forma*) dum grupóide G é a propriedade que possuem todos os grupóides isomorfos a G e só esses.

Um exemplo análogo, que convém citar, é o da *forma duma figura* F (propriedade que possuem todas as figuras semelhantes a F e só essas).

Mas, assim como não faz sentido falar do *conjunto de todos os conjuntos* (por causa do Paradoxo de Russell), assim também não faz sentido falar do *conjunto de todos os grupóides* (pela mesma razão). Neste caso, uma solução é utilizar o termo 'classe' com significado mais amplo que o de 'conjunto' (ver págs. 105-106); então o universo em que é definida a relação de isomorfia será a *classe de todos os grupóides*, que ficará repartida em classes de equivalência pela referida relação ([1]).

Muito Importante:

No *Compêndio* define-se 'estrutura dum grupóide' (1.° vol., 2.° tomo, pág. 36) de maneira diversa da anterior, embora lhe seja equivalente, em virtude do Princípio de Isomorfia. Mas talvez seja preferível a definição anterior, para estabelecer uniformidade com as definições de número cardinal, forma duma figura, etc.

Sendo assim, o princípio de isomorfia admite um segundo enunciado que vem esclarecer o significado de 'estrutura', como

---

([1]) Recordemos que, segundo vários autores, é a estas classes que deveríamos chamar *estruturas de grupóide*.

propriedade equivalente à conjunção das propriedades formais da operação do grupóide:

A estrutura dum grupóide (A, θ) *equivale à conjunção de todas as propriedades lógicas da operação* θ.

Mas, nos casos *usuais*, verifica-se o seguinte facto, em que se revela a própria essência da matemática moderna:

Entre todas as possíveis propriedades lógicas de θ, *é possível escolher algumas, em número finito (e geralmente pequeno), que implicam todas as outras.*

As propriedades assim escolhidas são chamadas os *axiomas* e as restantes os *teoremas* da estrutura.

Nestas condições, dar uma estrutura equivale a dar um sistema de axiomas ([1]).

Por exemplo, dar a estrutura do grupóide $(\mathbb{N}, +)$ equivale a dar um sistema de axiomas (propriedades da adição em $\mathbb{N}$), equivalente ao sistema de PEANO, como se verá no 7.º ano.

Entretanto, como preparação do terreno psicológico, será muito importante resolver os exercícios da página 37.

Eis mais dois exercícios esclarecedores:

I. Os grupóides $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$ são isomorfos? Porquê?

II. Os grupóides $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ são isomorfos? Porquê?

Trata-se de procurar propriedades lógicas que sejam válidas num e não no outro. Por exemplo, a propriedade

$$\forall a, \exists x : x + x = a$$

é válida em $(\mathbb{Q}, +)$ e não em $(\mathbb{Z}, +)$.

Por sua vez, a propriedade

$$\forall a, \exists x : x \cdot x = a,$$

é válida em $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ e não em $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$.

Convém que seja o aluno a descobrir por si estas propriedades.

10. Dum modo geral, os assuntos marcados com asterisco são facultativos. Mas a noção de quase-grupo deve ser dada, *pelo menos* sob a forma de exercício, a propósito do teorema:

([1]) Note-se que este facto se verifica não só com as estruturas do grupóide, mas ainda com qualquer outra que se considere em matemática.

A operação dum grupo é sempre reversível.

Para concretizar melhor o conceito de operação reversível, apresente-se o exemplo sugestivo do n.º 4, pág. 13. Aqui a operação é reversível, mas *o grupóide não é um grupo* (não é associativo). Exemplo análogo, igualmente sugestivo, é o do grupóide $(\mathbb{Z}, -)$. O aluno deve, por si só, chegar a esta conclusão:

O facto de a operação dum grupóide (A, θ) ser reversível *equivale a serem biunívocas as aplicações*

$$x \hookrightarrow \alpha\theta x \quad , \quad x \hookrightarrow x\theta\alpha \quad , \quad \forall \alpha \in A$$

No caso em que a operação é definida por uma tabela, estas aplicações são dadas respectivamente pelas linhas e pelas colunas, e é assim que o aluno se pode aperceber do referido facto.

Os termos 'quase-grupo' e 'quadrado latino' surgem agora como necessidade de dar um nome às situações encontradas.

Quanto aos teoremas 'Um quase-grupo é um grupo, sse for associativo' e *'A matriz dum grupóide finito define um quase-grupo, sse é um quadrado latino'* ficam à mercê das circunstâncias e a título de curiosidade.

Note-se que no primeiro teorema há um ponto delicado, relativo à existência de elemento neutro. Se (A, θ) é um quase-grupo, tem-se

$$\text{(1)} \qquad \forall c \in A, \ \exists u \in A : c\theta u = c$$

Isto leva o aluno precipitadamente a concluir que todo o quase-grupo tem elemento neutro. Mas os exemplos apresentados mostram que isto não é verdade.

Para ver que a conclusão é precipitada, basta lembrar que o elemento u indicado em (1) *depende de* c e *não verifica necessariamente a condição* $u\theta c = c$. Para a existência de elemento neutro, deveria ter-se, em vez de (1):

$$\exists u \in A, \ \forall c \in A : c\theta u = u\theta c = c$$

o que é bastante diferente de (1) e acaba por ser demonstrado, aplicando a associatividade.

11. A introdução ao estudo dos logaritmos, feita no n.º 22, tem ainda carácter intuitivo, como se diz aí, e deverá ser completada logicamente no 7.º ano. *Mas, para já, é necessário tirar o máximo partido do estudo anterior sobre isomorfismos.*

Assim, os clássicos teoremas sobre logaritmos (do produto, do quociente, etc.) devem aparecer como simples consequência do teorema relativo à aplicação inversa de um isomorfismo. Aliás, isto irá tornar-se perfeitamente claro no espírito do aluno, quando fizer uso consciente da régua de cálculo.

Os alunos costumam reagir quando se trata de dar uma ideia de demonstração do teorema fundamental (n.º 24, pág. 65), notando que, para além do algarismo das décimas, o cálculo do logaritmo se torna excessivamente laborioso. Deve-se então explicar-lhes que não se trata propriamente de recomendar um método de cálculo dos logaritmos (que, em matemática superior, se pode fazer, de maneira muito mais expedita, por meio de séries), mas sim de ver como se pode demonstrar a existência e a unicidade do logaritmo, visto que, *teoricamente*, será possível determinar tantos algarismos decimais do logaritmo quantos se queiram.

Em todo o caso, para que esta ideia se torne mais clara no espírito do aluno, será aconselhável fazer, como exercício, o cálculo de logaritmos, na base dois, *de números escritos igualmente no* sistema de base dois — *por exemplo de 3 na base 2, ou seja o logaritmo de 11 na base 10, usando o sistema de numeração binária. Será então muito mais fácil determinar vários algarismos exactos do logaritmo. Exercícios como este, além de esclarecerem o conceito de logaritmo, chamam novamente a atenção para o sistema binário, de que os computadores electrónicos mostram o grande interesse e actualidade.*

12. Que o professor não perca esta oportunidade para demonstrações simples da irracionalidade de logaritmos na base 10, como se faz por exemplo no *Compêndio de Álgebra* adoptado, para o logaritmo de 2 (pág. 242).

Além disso, será do maior interesse resolver os 11 primeiros exercícios do Capítulo XXII deste *Compêndio*, pág. 250, não só para esclarecimento da teoria, mas ainda para desenvolvimento no aluno da técnica de cálculo. *Um dos factos alarmantes que a actual experiência tem posto em foco é que a preparação adquirida pelos alunos no 2.º ciclo é deficientíssima, até no que se refere à técnica de cálculo algébrico elementar.*

13. A aprendizagem do uso da régua de cálculo deverá ser gradual, ocupando pouco tempo em cada aula e limitando-se a operações simples no 6.º ano.

A primeira coisa a estudar é a teoria da régua de cálculo, em íntima ligação com a teoria dos logaritmos. Neste sentido, é muito recomendável que o aluno *construa* ele próprio uma régua de cálculo rudimentar, com dois bocados de cartolina sobre os quais deve marcar duas escalas logarítmicas, numa base conveniente. Aliás, a noção de escala logarítmica é por si só muito importante e virá a reaparecer no 7.º ano, ao fazer-se uso de papel logarítmico ou semilogarítmico.

Devem seguir-se as instruções que acompanham a própria régua, utilizando a régua de demonstração para que o ensino possa ser rapidamente apreendido por toda a turma.

VII

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO VI

1. Embora os assuntos aqui desenvolvidos tenham grande importância e despertem seguro interesse nas turmas, grande parte do que se inclui neste capítulo virá a ser mais para elucidação do professor do que para informação do aluno. Assim, convirá aqui indicar desde já, precisamente, um mínimo de matéria a tratar nas aulas, o que passamos a fazer.

2. Todos os assuntos dos n.os 1 a 5, inclusive, deverão ser tratados em pormenor, excepto o n.º 2 em que basta dar a noção de isomorfismo entre anéis, renunciando ao exemplo apresentado (que exige tempo excessivo), mas insistindo nas notas que são bastante esclarecedoras.

3. Devem dar-se os conceitos de 'divisor de zero' e de 'elemento regular', mas podem omitir-se os teoremas do n.º 6. Nestas condições, o corolário 1 do n.º 7 aparecerá como propriedade dos corpos, que se demonstra directamente:

Suponhamos que $a \cdot b = 0$, com $a \neq 0$. Então a é regular (por definição de corpo) e assim, multiplicando ambos os membros de $a \cdot b = 0$ por a^{-1}, obtém-se

$$a^{-1}(ab) = 0 \text{ ou seja } (a^{-1}a) \cdot b = 0 \text{ , donde } b = 0$$

Isto prova a inexistência de divisores de zero num corpo A qualquer.

Analogamente se demonstra o corolário 2 (a que chamaremos agora Propriedade do Anulamento do Produto):

Se $a \cdot b = 0$ e $a \neq 0$, tem-se, pelo raciocínio anterior, $b = 0$.

Se $a \cdot b = 0$ e $b \neq 0$, tem-se, de modo análogo, $a = 0$.

Logo $a . b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$. A implicação inversa é consequência imediata do Corolário I da pág. 75.

Assim se poupará tempo, que vai ser necessário para outros assuntos mais prementes.

4. Os n.os 8 e 9 devem manter-se com as respectivas notas esclarecedoras, mas a matéria dos n.os 10 e 11 deve agora reduzir-se ao estudo de equações quadráticas em $\mathbb{R}$.

Deve-se agora começar, precisamente, pela resolução da equação do 2.º grau em $\mathbb{R}$ (omitindo-se pois o n.º 10).

Já no primeiro período, a propósito do estudo da lógica (págs. 21-22 deste *Guia)*, o aluno recordou um artifício que permite fazer facilmente a factorização dum polinómio do segundo grau (quando possível). *Podemos agora aplicar artifício à resolução da equação geral do 2.º grau.* Convirá, como sempre, começar por exemplos numéricos e só depois *convidar* os alunos a passarem ao caso geral.

EXEMPLO 1:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{18} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1) = 0$$

Vê-se, deste modo, que a equação proposta tem *duas* raízes em $\mathbb{R}$ $\left(-1 \text{ e } \frac{3}{2}\right)$.

EXEMPLO 2:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$$

Vê-se que a equação tem uma *única* raiz (3).

EXEMPLO 3:

$$3x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} = 0$$

Como $\frac{5}{9} > 0$ e $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue-se que a equação é impossível em $\mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO GERAL:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Ponhamos, agora, $b^2 - 4ac = \triangle_\beta$. Três casos se podem dar:

1) $\triangle > 0$. Sabe-se que existe então um e um só número positivo cujo quadrado é $\triangle$. Designa-se por $\sqrt{\triangle}$ esse número positivo, que é raiz quadrada de $\triangle$. Tem-se pois por definição $\triangle = (\sqrt{\triangle})^2$ e portanto:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b - \sqrt{\triangle}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\triangle}}{2a}\right) = 0$$

Deste modo, o PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO mostra que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem *duas* raízes em $\mathbb{R}$, dadas pelas fórmulas:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

2) $\triangle = 0$. Então

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

e o PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO mostra que a equação tem uma *única* raiz, que é $\dfrac{-b}{2a}$. Mas, como essa raiz pode ser dada por qualquer das fórmulas (1), também se diz que a equação tem neste caso *uma raiz dupla* (ou *duas raízes iguais*, $x_1 = x_2$), enquanto no primeiro caso se diz que a equação tem *duas raízes simples* (ou duas raízes distintas, $x_1 \neq x_2$).

3) $\Delta < 0$. Neste caso, tem-se $-\Delta > 0$. Ora

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

Como $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ e $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vem

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R},$$

o que mostra que, neste caso, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ é impossível em $\mathbb{R}$, isto é, *não tem nenhuma raiz em* $\mathbb{R}$.

5. A análise anterior mostrou que, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, se tem:

$$ax^2 + bx + c \equiv a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + c\right) \equiv$$

$$\equiv a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Além disso, quando $\Delta \geqslant 0$, tem-se:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \equiv \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x - \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Em conclusão:

TEOREMA. Se $\Delta \geqslant 0$, *tem-se, quaisquer que sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *com* $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c \equiv a\,(x - x_1)\,(x - x_2),$$

onde $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Estas últimas fórmulas fornecem facilmente as *relações entre as raízes e os coeficientes do polinómio:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ , \ x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

A partir deste momento podem resumir-se os três casos principais da discussão da equação quadrática, como no n.º 13, pág. 110, e prosseguir a discussão como se faz nesse número.

Pode, depois, fazer-se a discussão de algumas equações numéricas e de algumas (poucas) equações com coeficientes dependentes dum parâmetro, *sem cair no exagero tradicional*.

NOTA. A título de esclarecimento, terá muito interesse informar o aluno de que a anterior teoria da equação do 2.º grau pode ser generalizada a corpos quaisquer, desde que estes verifiquem certa condição que a seguir se verá. Considere-se, por exemplo, a equação

$$\bar{2}x^2 + \bar{5}x + \bar{3} = 0$$

no corpo A_7. Segundo o artifício habitual, tem-se:

$$\bar{2}x + \bar{5}x + \bar{3} = 0 \Leftrightarrow \bar{2}\left(x^2 + \frac{\bar{5}}{\bar{2}} \cdot x + \frac{\bar{1}}{\bar{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \bar{6}x + \bar{5} = 0 \Leftrightarrow (x + \bar{3})^2 + \bar{5}^2 - \bar{3}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \bar{3})^2 + \bar{3} = 0 \Leftrightarrow (x + \bar{3})^2 - \bar{4} = 0$$

Procuraremos agora um elemento de A_7 cujo quadrado seja $\bar{4}$. Construindo a tabela da aplicação $x \mapsto x^2$ neste corpo vê-se que há aí dois elementos cujo quadrado é $\bar{4}$: são $\bar{2}$ e $\bar{5}$. Escolhendo o primeiro, tem-se:

$$(x + \bar{3})^2 - \bar{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + \bar{3})^2 - \bar{2}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \bar{5})\ (x + \bar{1}) = 0 \Leftrightarrow (x - \bar{2})\ (x - \bar{6}) = 0$$

A equação proposta tem, pois, duas raízes: $\bar{2}$ e $\bar{6}$ (em A_7).

Note-se que, numa das passagens anteriores, foi necessário dividir $\bar{6}$ em A_7 pelo *número natural* 2, o que deu $\bar{3}$. *No corpo* A_7 *a divisão por* 2 *é sempre possível, visto que* $2 \cdot 1 = \bar{2} \neq 0$ *e dividir por* 2 *equivale a dividir por* $\bar{2}$ (tem-se $2x \equiv \bar{2}x$). *Mas em* A_2 *a divisão por* 2 *é impossível porque* $2 \cdot \bar{1} = \bar{2} = 0$.

Diz-se que um corpo K tem *característica 2,* sse $2 . 1 = 0$ em K (sendo 1 o elemento unidade de K).

Ora é fácil ver o seguinte:

Num corpo K *que não tenha característica 2, uma equação do 2.º grau tem duas raízes, uma só, ou nenhuma, conforme o discriminante* Δ *da equação tiver duas raízes quadradas, uma só ou nenhuma. Nesta hipótese, as fórmulas resolventes e todos os teoremas anteriores em que não intervenha a relação* $<$ *são válidas no corpo* K.

6. O estudo das funções quadráticas em $\mathbb{R}$ (n.º 14, págs. 113-118, 2.º tomo) pode, agora, fazer-se rapidamente. *As demonstrações dos*

teoremas I, II e III podem ser dispensadas: basta que o aluno chegue indutivamente a essas conclusões, como foi preconizado no n.º 10 deste Guia (págs. *21-22*).

Quanto ao COMPLEMENTO AO TEOREMA I, convirá que seja também o aluno a redescobri-lo. Apresente-se, por exemplo, a função

$$f(x) \equiv x^2 - 3x + 1 \qquad (\Delta > 0)$$

e convide-se o aluno a procurar a posição do número 2 em relação às raízes desta função. Como $f(2) = 2 > 0$, vê-se que 2 é exterior ao intervalo das raízes. Pergunta-se:

É maior ou menor que as raízes?

A tendência será resolver a equação para fazer o confronto. *Mas a equação foi escolhida propositadamente com as raízes irracionais e o que interessa é responder à pergunta sem resolver a equação.* Suponhamos que 2 é menor que as raízes (hipótese sugerida ao aluno).

Então

$$x_1 > 2 \quad e \quad x_2 > 2 \quad \text{donde,} \quad x_1 + x_2 > 4$$

Ora $x_1 + x_2 = 3$. Logo...

Dum modo geral:

$$c \qquad x_1 \qquad \frac{S}{2} \qquad x_2$$

$$x_1 > c \wedge x_2 > c \Rightarrow x_1 + x_2 > 2c \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} > c$$

$$x_1 < c \wedge x_2 < c \Rightarrow x_1 + x_2 < 2c \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} < c$$

Daqui o aluno deduz a regra em questão (convém recorrer ao gráfico anterior).

7. Quanto à matéria dos n.ºs 15, 16 e 18 bastará fazer o que se disse atrás, a propósito da intersecção de rectas em geometria analítica. Quando muito, poderá resolver-se um sistema de equações lineares num corpo A_p, a título de curiosidade.

Quanto ao assunto do n.º 17, seria prematuro e pouco proveitoso tratá-lo agora.

Também a análise do conceito de equação paramétrica, tal como é feita no n.º 19, nos parece prematura — muito embora, como se disse atrás, se possa fazer a discussão de equações paramétricas, apresentadas de modo intuitivo. No entanto, a análise do referido conceito de equação paramétrica *interessa sobremaneira ao professor.*

MUITO IMPORTANTE:

A resolução e discussão de problemas concretos por meio de equações é da máxima importância, como se diz no n.º 20 (pág. 135) e até porque, como já atrás foi observado, o ensinar a pôr problemas em equação *tem sido deploravelmente descurado no 2.º ciclo.*

Um problema típico, para começar, seria o que se considera no Compêndio de Álgebra, *7.º ano, Cap. XIV, n.º 3, pág. 71, relativo ao encontro de dois automóveis,* começando pelo caso particular numérico e passando depois ao caso geral, seguido de discussão (supondo d fixo > 0 e v, v' variáveis).

Note-se, a propósito, que a discussão de equações lineares, tal como se faz nesse capítulo do referido Compêndio, *é sem* significado concreto, *é inteiramente dispensável — é tempo perdido!*

Aliás, a resolução e discussão de problemas concretos é assunto que convém iniciar no 6.º ano, com moderação, para desenvolver depois no 7.º ano.

8. O assunto relativo a equações do 3.º grau (n.º 2, págs. 136-142) deverá restringir-se ao corpo real e *ser considerado, essencialmente, como motivação para o estudo do corpo complexo.*

No entanto, o teorema segundo o qual uma equação cúbica não pode ter mais de três raízes distintas pode ser demonstrado para um corpo K qualquer e as considerações relativas a equações binómias podem igualmente ser mantidas com a mesma forma.

Mas logo a seguir deve avisar-se o aluno de que, *para fixar ideias,* o corpo K passa a ser o corpo $\mathbb{R}$ e assim, onde se diz 'determinar um elemento h tal que' poderá dizer-se 'determinar um número h tal que'. Do mesmo modo, a frase *'Suponhamos que o corpo* K *não é de característica* 3' pode ser omitida, por desnecessária, assim como, na pág. 138, a restrição 'se o corpo K não é de característica 2' e tudo o que, no seguimento, se liga a estas duas hipóteses (verificadas em $\mathbb{R}$).

Por outro lado, desde que exista o número α dado por (7), isto é, desde que seja

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geqslant 0$$

existe uma e uma só raiz cúbica de α em R, que se designa por $\sqrt[3]{\alpha}$.

O enunciado do teorema da pág. 139 deverá então ser modificado de acordo com estas observações:

TEOREMA. *A fórmula*

$$x = \sqrt[3]{\alpha} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\alpha}}\ , \quad com\ \alpha = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

fornece uma raiz da equação (2) *em* $\mathbb{R}$, *desde que seja*

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geqslant 0$$

Convém ainda observar ao aluno que, de acordo com (4), (5) e (6) (no texto), se tem $x = u + v = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ e portanto

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

É com este aspecto que a fórmula resolvente da equação (2) se costuma chamar 'fórmula de Tartaglia'. Mas a anterior tem vantagem sobre esta, quando se passa do corpo real ao corpo complexo.

Quanto a exemplos, é claro que basta dar os dois primeiros.

9. O assunto do n.º 22 deverá ser dado integralmente como se apresenta no texto, *com uma possível excepção:* a demonstração de isomorfismo dada nas páginas 149 e 150, que pode ser dispensada. No entanto, a observação que se segue sobre a natureza dos números complexos é, sem dúvida alguma, essencial.

Igualmente essencial se deve considerar a matéria dos n.ºs 23, 24, 26 *e* 28.

O n.º 25 deve ser suprimido e o n.º 28 considerado *facultativo*, assim como o n.º 29; não deve contudo deixar de ser feita uma *breve referência às equações biquadradas* (n.º 29).

Os n.ºs 30 e 31 poderão ser indicados, como leitura, aos alunos mais interessados.

O n.º 32 (funções homográficas) poderá ser reservado para o 7.º ano, *no corpo* $\mathbb{R}$, a propósito do estudo das cónicas, como foi atrás indicado.

10. Finalmente, o estudo das álgebras de Boole (sem demonstrações ou apenas com *uma ou duas*, a título de exemplo), pode ser transferido para o 7.º ano, com duas finalidades principais:

a) fazer uma revisão sistematizada das operações sobre valores lógicos e das operações sobre conjuntos, servindo de introdução ao cálculo das probabilidades;

b) apresentar um tipo muito importante de estruturas algébricas (as álgebras de Boole), que se afastam nitidamente do domínio clássico dos universos numéricos, *e cuja comparação com as estruturas análogas de corpo deve ser feita atentamente pelo aluno.*

VIII

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO VII

1. Este assunto deverá ser estudado no 7.º ano, no regime de 3 horas por semana em paralelo com outro assunto, que continua igualmente novidade para o aluno, a fim de tirar o máximo rendimento possível do 1.º período, em que o cérebro do aluno se encontra mais fresco, graças ao repouso das férias grandes.

2. Não esquecer que o assunto do n.º 5 (coeficiente de associação) tem carácter facultativo e que, portanto, só no caso de a turma estar *excepcionalmente adiantada* se deve tratar.

Por sua vez, o assunto do n.º 7 poderá ser dado rapidamente, sem necessidade de apresentar todos os pormenores, atendendo à completa analogia com a linguagem em termos de atributos.

O n.º 8 poderá ser reservado exclusivamente para leitura facultativa em casa, excepto a nota final, sobre o conceito de 'acaso', que deve ser discutida na aula.

Deve igualmente estabelecer-se diálogo, tão animado quanto possível, quanto ao tema do n.º 10, uma vez tratado o assunto do n.º 9 (com as facilidades que oferece a analogia com o conceito de frequência de um atributo).

3. A introdução do conceito empírico de probabilidade, feita no n.º 11, é o *momento decisivo* deste capítulo.

O melhor será começar o estudo imediatamente com a experiência do lançamento de uma moeda ao ar. *Cada aluno poderá fazer separadamente, no seu lugar, uns 20 lançamentos sucessivos da moeda, e escreverá depois no quadro preto a frequência relativa do acontecimento* sair face. *Faz-se depois a média das frequências e propõe-se aos alunos tirarem conclusões.*

Deverá depois ser feita a experiência do lançamento de um 'punaise' ao ar, em condições análogas. *Deverão escolher-se* 'punaises' *todas do mesmo fabrico e com o bico bastante comprido, para que seja nitidamente mais provável o acontecimento* cair de bico.

Os resultados destas experiências obtidos nas diferentes turmas experimentais devem depois ser comparados entre si, para se obter uma melhor aproximação.

4. Todos os restantes assuntos do capítulo deverão ser apresentados mais ou menos segundo a orientação do *Compêndio*, com possíveis variantes que resultem do diálogo vivo com os alunos, no sentido de obter a máxima espontaneidade.

Os n.os 19, 20 e 21 prestam-se em parte para leitura em casa, em parte para diálogo na aula.

Os n.os 22 e 23 têm carácter facultativo. A sua leitura pode ser recomendada especialmente aos alunos que pretendem seguir ciências biológicas, medicina, agronomia, veterinária ou economia.

O tema do n.º 24 deveria ser objecto de discussão na aula.

ÍNDICE

	Págs.
Advertência prévia	9
Normas gerais	11
I — Observações ao Capítulo I	15
II — Observações ao Capítulo II	30
III — Introdução à geometria analítica (assunto não tratado no *Compêndio)*	45
IV — Observações ao Capítulo III	98
V — Observações ao Capítulo IV	114
VI — Observações ao Capítulo V	121
VII — Observações ao Capítulo VI	134
VIII — Observações ao Capítulo VII	143

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA