TIPOGRAFIA DELTA, LDA.
51-B, R. ACTOR VALE, 51-C
TELEFONE 84 79 77 — LISBOA

SUR LES RELATIONS D'INVARIANCE DANS LES TREILLIS

PAR

M.ª L. NORONHA GALVÃO et A. ALMEIDA COSTA

SEPARATA DA REVISTA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA
2.ª Série — A — Vol. XIV — Fasc. 1.º — Págs. 45 a 60

LISBOA — 1972

SUR LES RELATIONS D'INVARIANCE DANS LES TREILLIS *

PAR

M.ª L. NORONHA GALVÃO et A. ALMEIDA COSTA

§ 1. RELATIONS DE ZASSENHAUS. RELATIONS D'INVARIANCE

1) **Introduction**—Soit $R=\{a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots\}$ un treillis. L'une quelconque des deux conditions ci-dessous caractérise les treillis modulaires:

I: $a_1 \eqslantless a_2$ et $b_1 \eqslantless b_2$ entraînent la perspectivité des deux intervalles

$$[a_1 \vee (a_2 \wedge b_1), a_1 \vee (a_2 \wedge b_2)], \quad [(a_2 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2), a_2 \wedge b_2];$$

II: $a_1 \eqslantless a_2$ et $b_1 \eqslantless b_2$ entraînent l'égalité

$$(a_2 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2) = [(a_2 \wedge b_1) \vee a_1] \wedge b_2.$$

Par conséquent, I ou II suffisent pour démontrer le théorème des subdivisions équivalentes [1], donc le théorème de Jordan-Hölder.

Prenons une relation binaire η, sur R, de telle sorte que $a \eta b$ implique $a \eqslantless b$. Alors, l'une quelconque des deux conditions équivalentes ci-dessous:

---

* Ce travail a été publié grâce à l'aide de l'Institut de Haute Culture.

Z_2': $a_1 \eta a_2$ et $b_1 \eta b_2$ entraînent la perspectivité des deux intervalles de l'assertion I;

Z_3: $a_1 \eta a_2$ et $b_1 \eta b_2$ entraînent l'égalité de l'assertion II;

suffit pour garantir que deux η-suites

(1) $\quad a=a_0 \lesssim a_1 \lesssim \cdots \lesssim a_n=b, \quad a=b_0 \lesssim b_1 \lesssim \cdots \lesssim b_m=b$

admettent des subdivisions équivalentes, donc telles qu'en posant $a_{ij}=a_i \vee (a_{i+1} \wedge b_j)$, $(i=0,1,\ldots,n-1; j=0,1,\ldots,m)$, et $b_{ji}=b_j \vee (b_{j+1} \wedge a_i)$, $(j=0,1,\ldots,m-1;\ i=0,1,\ldots,n)$, les intervalles $[a_{ij}, a_{i,j+1}]$ et $[b_{ji}, b_{j,i+1}]$ sont projectifs [1]. Toutefois, ces subdivisions ne sont pas, en général, des η-suites. Pour qu'on arrive à un tel résultat, il suffit évidemment d'ajouter à Z_3', ou à Z_3, la condition

Z_2': $a_1 \eta a_2$ et $b_1 \eta b_2$ entraînent $[a_1 \vee (a_2 \wedge b_1)] \eta [a_1 \vee (a_2 \wedge b_2)]$.

Par conséquent, l'ensemble des conditions Z_2', Z_3', ou Z_2', Z_3, permet d'obtenir, en partant des η-suites (1), des η-subdivisions équivalentes, donc démontrer un théorème de Jordan-Hölder correspondant. D'ailleurs, on doit tenir compte que les η-suites sont toujours supposées finies et que, si deux intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ sont projectifs, $a=b$ implique $c=d$.

On obtient une condition plus faible que Z_2' par l'énoncé que voici:

Z_2: $a_1 \eta a_2$ et $b_1 \eta b_2$, avec $b_2 \lesssim a_2$, impliquent $(a_1 \vee b_1) \eta (a_1 \vee b_2)$.

La validité de Z_2' mène à Z_2, mais on ne démontre pas la réciproque. Cependant, en ajoutant à Z_2 cette nouvelle condition

Z_1: $a_1 \eta a_2$ et $b_1 \eta b_2$ impliquent $[(a_2 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2)] \eta (a_2 \wedge b_2)$,

alors, l'ensemble des deux conditions Z_1 et Z_2 entraîne

Z_2'. Soit en effet $a_1 \eta a_2$ et $b_1 \eta b_2$. Puisque Z_1 est valable et $a_2 \wedge b_2 \lesssim a_2$, on obtient, compte tenu de Z_2, $[a_1 \vee (a_2 \wedge b_1)] \eta [a_1 \vee (a_2 \wedge b_2)]$.

Nos raisonnements montrent qu'en plaçant à côté de Z_2' et Z_3' une condition Z_1', identique à Z_1, les deux systèmes de conditions

$Z_k', (k=1,2,3)$; et $Z_k, (k=1,2,3)$; sont équivalents.

Livšic [2] fait une théorie de Jordan-Hölder en introduisant pour la relation η des conditions plus fortes que celles de l'ensemble Z_k, $(k=1,2,3)$. Il arrive ainsi à obtenir pour les intervalles $[a_{ij}, a_{i,j+1}]$ et $[b_{ji}, b_{j,i+1}]$ des relations d'isomorphisme qui n'importent pas à notre objet.

Nous appelerons *relation de Zassenhaus* une relation η vérifiant le système Z_k' ou Z_k, $(k=1,2,3)$. Nous étudierons une relation binaire η, dite *relation d'invariance,* plus forte qu'une relation de Zassenhaus, et en ferons une théorie de Jordan-Hölder. Cette théorie, à côté de théorèmes d'existence de η-suites de composition portera aussi sur des questions de longueur de telles η-suites. Dans un travail à publier plus tard, par le premier des auteurs, seront faites des applications aux groupes et aux quasi-groupes bilatères et unilatères, en poursuivant des idées déjà développées [3].

2) La condition I_1 — Il importe à l'étude de la relation η qu'on vient de signaler (on n'oubliera pas que $a \eta b$ implique $a \lesssim b$) la condition I_1 qu'on énonce

I_1: $a \eta c$ et $b \lesssim c$ entraînent $(a \wedge b) \eta b$.

Deux énoncés équivalents sont les suivants:

I_1': $a \eta b$ entraîne $(a \wedge z) \eta (b \wedge z), \forall z \in R$;

I_1'': $a\eta(a\vee b)$ entraîne $(a\wedge b)\eta b$ et $a\eta b$, avec $a\eqslantless x\eqslantless b$, entraîne $a\eta x$.

Nous allons montrer en effet la chaîne d'implications que voici: $I_1\Rightarrow I_1'\Rightarrow I_1''\Rightarrow I_1$. À partir de I_1, si l'on a $a\eta b$, puisque $b\wedge z\eqslantless b$, on obtient $(a\wedge b\wedge z)\eta(b\wedge z)$, c'est-à-dire $(a\wedge z)\eta(b\wedge z)$, et I_1' est valable. Ensuite, à partir de I_1', si l'on a $a\eta(a\vee b)$, on obtient $(a\wedge b)\eta[(a\vee b)\wedge b]$, c'est-à-dire $(a\wedge b)\eta b$, et, si l'on a $a\eta b$ et $a\eqslantless x\eqslantless b$, on obtient $(a\wedge x)\eta(b\wedge x)$, c'est-à-dire $a\eta x$, et I_1'' est valable. Enfin, on a l'implication $I_1''\Rightarrow I_1$, puisque, si $a\eta c$ et $b\eqslantless c$, alors, de $a\eqslantless a\vee b\eqslantless c$, on tire $a\eta(a\vee b)$, donc $(a\wedge b)\eta b$.

Théorème 1:—*Prenons η vérifiant I_1. Alors: Si $a=a_0\eqslantless a_1\eqslantless\cdots\eqslantless a_i\eqslantless\cdots a_k\eqslantless\cdots\eqslantless a_n=c$ et $b=b_0\eqslantless b_1\eqslantless\cdots\eqslantless b_j\eqslantless\cdots\eqslantless b_l\eqslantless\cdots\eqslantless b_m=c$ sont deux η-suites, il existe des η-suites entre $a_i\wedge b_j$ et a_k, $(k\geqslant i)$, et entre $a_i\wedge b_j$ et b_l, $(l\geqslant j)$. En particulier: 1) si $a\eqslantless b$, on a $a\eta a$ et il existe une η-suite entre a et et b; 2) si l'on a $a\eta c$ et si $b=b_0\eqslantless b_1\eqslantless\cdots\eqslantless b_j\eqslantless\cdots\eqslantless b_m=c$ est une η-suite, il existe des η-suites entre $a\wedge b_j$ et a et entre $a\wedge b_j$ et b_l, $(l\geqslant j)$.* En tenant compte de I_1', on peut en effet écrire les η-suites

(1) $$a_i\wedge b_j\eqslantless a_i\wedge b_{j+1}\eqslantless\cdots\eqslantless a_i\wedge b_m=a_i\eqslantless\cdots\eqslantless a_k,$$

(2) $$a_i\wedge b_j\eqslantless a_{i+1}\wedge b_j\eqslantless\cdots\eqslantless a_n\wedge b_j=b_j\eqslantless\cdots\eqslantless b_l.$$

Les assertions concernant les cas particuliers sont immédiates. Le deuxième cas particulier mène d'ailleurs aux η-suites

(3) $$a\wedge b_j\eqslantless a\wedge b_{j+1}\eqslantless\cdots\eqslantless a\wedge b_m=a,\quad a\wedge b_j\eqslantless b_j\eqslantless\cdots\eqslantless b_l.$$

Toujours qu'on ait $a\neq b$, $a\eta b$ et qu'il n'existe aucune η-suite entre a et b de la forme $a<\cdots<z<\cdots<b$, on écrira $a<\!<b$. Si la condition I_1 est vérifiée, c'est le même de dire $a<\!<b$, ou dire $a\neq b$, $a\eta b$ et il n'existe aucun $z\neq a$ tel que $a<z<b$, $z\eta b$.

En associant à la condition I_1 la condition Z_2, la relation η vérifie aussi la condition Z_1, comme nous allons le voir. Admettons qu'on ait $a_1\eta a_2$ et $b_1\eta b_2$. Puisque I_1 est équivalent à I_1', on en tire $(a_1\wedge b_2)\eta(a_2\wedge b_2)$ et $(a_2\wedge b_1)\eta(a_2\wedge b_2)$. Ensuite, d'après Z_2, puisque $a_2\wedge b_2\eqslantless a_2\wedge b_2$, on obtient $[(a_2\wedge b_1)\vee(a_1\wedge b_2)]\eta(a_2\wedge b_2)$ justement Z_1. D'une façon réciproque, la seule condition Z_1, pourvu qu'on admette l'existence de $0\in R$ et bien aussi que $0\eta x$, $\forall x\in R$, entraîne I_1. En prenant en effet $a\eta c$, $b\eqslantless c$, puisque $0\eta b$, la condition Z_1 donne $(a\wedge b)\eta b$. Par conséquent:

Théorème 2:—*Si η vérifie I_1 et Z_2, alors Z_1 et Z_2 sont vérifiées. Réciproquement, Z_1 et Z_2 impliquent I_1 et Z_2, pourvu qu'il existe $0\in R$ et qu'on ait $0\eta x,\forall x\in R$.*

Ce sera pour nous très important l'étude du cas où η vérifie à la fois les conditions I_1, Z_2 et Z_3. Nous appelerons alors η une *relation d'invariance*. Il s'agit d'une relation de Zassenhaus, en général plus forte que cette dernière.

Exemples de relations de Zassenhaus:—1) La relation $\eqslantless$ dans les treillis modulaires; 2) la relation $x\eta y$, si $x,y\neq c$ et $x\eqslantless_{\circ}y$ (le signe $<_{\circ}$ signifie «couverture»), dans le treillis semi-modulaire bien connu [1]: $a<_{\circ}b<_{\circ}d<_{\circ}e$; $a<_{\circ}b<_{\circ}<_{\circ}g<_{\circ}e$; $a<_{\circ}f<_{\circ}g<_{\circ}e$; $a<_{\circ}f<_{\circ}c<_{\circ}e$; 3) la relation $\eqslantless_{\circ}$ dans le treillis $\{0<_{\circ}x_5<_{\circ}x_4<_{\circ}x_3<_{\circ}x_2<_{\circ}x_1<_{\circ}u;\ 0<_{\circ}y_2<_{\circ}<_{\circ}y_1<u\}$.

Remarques:—Dans l'exemple 2), si c intervient, Z_3 n'est pas vérifiée: $b=(e\wedge b)\vee(c\wedge d)\neq[(e\wedge b)\vee c]\wedge d=d$. D'autre part, le même exemple ne donne pas une relation d'invariance, car $d\eqslantless_{\circ}e$, $c\eqslantless e$, mais $d\wedge c=a\not\eqslantless_{\circ}c$. L'exemple 3) ne donne pas de même une relation d'invariance: $x_1\eqslantless_{\circ}u$, $y_1\eqslantless u$, mais $x_1\wedge y_1=0\not\eqslantless_{\circ}y_1$. Dans les deux cas, I_1 n'est pas vérifiée.

Exemples de relations d'invariance : — 1') Soit R un treillis verifiant la condition suivante, qui entraîne la loi duale de celle de Birkhoff [1]: $x <_\circ x \vee y$ implique $x \wedge y <_\circ y$. La relation $\leqq_\circ$ est d'invariance. Quant à I_1, prenons $a \leqq_\circ c$, $b \leqq c$. Ou bien $a = c$, donc $a \wedge b = b$; ou $a <_\circ c$, avec $b \nleqq_\circ a$, ce qui donne $a \vee b = c$, donc $a <_\circ a \vee b$ et $a \wedge b <_\circ b$; ou, enfin, $a <_\circ c$, avec $b \leqq a$, et $a \wedge b = b$. La condition Z_2 est aussi vérifiée, puisque $a_1 \leqq_\circ a_2$, $b_1 \leqq_\circ b_2$, avec $b_2 \leqq a_2$, donne $a_1 \leqq a_1 \vee b_1 \leqq a_1 \vee b_2 \leqq a_2$, donc $a_1 \vee b_1 \leqq_\circ a_1 \vee b_2$. Il reste à montrer Z_3. Soient $a_1 \leqq_\circ a_2$, $b_1 \leqq_\circ b_2$. Si l'on avait

$$(3') \quad a_1 \wedge b_2 \leqq (a_1 \wedge b_2) \vee (a_2 \wedge b_1) < [(a_2 \wedge b_1) \vee a_1] \wedge b_2 \leqq a_2 \wedge b_2,$$

puisque, compte tenu de I_1', on a $a_1 \wedge b_2 \leqq_\circ a_1 \wedge b_2$, on aurait

$$a_1 \wedge b_2 = (a_1 \wedge b_2) \vee (a_2 \wedge b_1), \quad [(a_2 \wedge b_1) \vee a_1] \wedge b_2 = a_2 \wedge b_2,$$

ce qui impliquerait $a_2 \wedge b_1 \leqq a_1 \wedge b_2$, $a_1 \vee (a_2 \wedge b_1) = a_1$, donc (3') donnerait $a_1 \wedge b_2 < a_1 \wedge b_2$, qui est un absurde.

2') Dans les treillis modulaires, le signe $\leqq_\circ$ done une réalisation de l'exemple précédent.

3') Dans le treillis des sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, on définit une relation d'invariance en posant $x \eta y$, si $x \leqq_\circ y$ et $(x, y) \neq (13, 123)$. La condition I_1' est vérifiée, car, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver x, y, z tels que $x \leqq_\circ y$ et $(x \wedge z, y \wedge z) = (13, 123)$. Cette hypothèse entraînerait $x \wedge z = 13$, $y \wedge z = 123$, donc $y = z = 123$, $x = 13$, $x \leqq_\circ y$, c'est-à-dire on n'aurait pas $x \eta y$. En ce qui concerne Z_2, si $x_1 \eta x_2$, $y_1 \eta y_2$ et $y_2 \leqq x_2$, on a $(x_1 \vee y_1) \eta (x_1 \vee y_2)$, puisqu'on ne pourra pas avoir $x_1 \vee y_1 = 13$, $x_1 \vee y_2 = 123$, car ces égalités impliqueraient $x_1 \vee x_2 = 123 = x_2$, $x_1 = 13$, donc on n'aurait pas $x_1 \eta x_2$. Quant à Z_3, sa validité est immédiate.

(4') Dans le treillis des sous-groupes d'un groupe, si $x \eta y$ signifie «x invariant en y», on obtient encore une relation d'invariance.

Lorsque η est une relation d'invariance, si l'on a $a \eta b$, on dit *a invariant en b*. S'il existe un élément universel u et on a $a \eta u$, a est appelé un *invariant*. La condition Z_2 montre que le supremum de deux invariants est un invariant, mais ceci n'arrive pas, en général, pour l'intersection de deux invariants. C'est ce qu'on voit en prenant le treillis modulaire $\{0 <_\circ a <_\circ d;\ 0 <_\circ b <_\circ d;\ 0 <_\circ c <_\circ d\}$ et en supposant η la relation $\leqq_\circ$.

Une η-suite complète, lorsque η est une relation d'invariance, prend le nom de *η-suite de composition*. Ces suites seront l'objet du § suivant. Nous représenterons par $c_\eta(a, b)$ la longueur des η-suites de composition entre a et b.

3) Relations d'invariance — Avant de supposer η une relation d'invariance, nous démontrerons la proposition que voici:

Théorème 3 : — *Si η vérifie les conditions I_1 et Z_2 et si l'on a $a \eta c$, alors l'existence d'une η-suite $b = b_0 \leqq b_1 \leqq \cdots \leqq b_m = c$ implique l'existence d'une η-suite $a \leqq a \vee b \leqq a \vee b_1 \leqq \cdots \leqq a \vee b_{m-1} \leqq c$.* D'après I_1'', $a \eta c$ et $a \leqq a \vee b \leqq c$ donnent $a \eta (a \vee b)$. Ensuite $a \eta c$ et $b \eta b_1 \leqq c$, compte tenu de Z_2, donnent $(a \vee b) \eta (a \vee b_1)$; de même $a \eta c$ et $b_1 \eta b_2 \leqq c$ donnent $(a \vee b_1) \eta (a \vee b_2)$. En poursuivant, le théorème en résulte.

Théorème 4 : — *En prenant la relation d'invariance η, l'hypothèse $x << x \vee y$ entraîne $x \wedge y << y$.* D'abord, $x \eta (x \vee y)$ implique $(x \wedge y) \eta y$. Puis, on ne peut pas avoir $x \wedge y = y$, car on en concluerait $y \leqq x$, donc $x = x \vee y$. Enfin, l'existence de z_0 tel que $x \wedge y < z_0 < y$ et tel aussi que $z_0 \eta y$ impliquera une contradiction, comme nous allons le voir. Si z_0 existe, de $x \leqq x \vee z_0 \leqq x \vee y$, on tire $x \eta (x \vee z_0)$. D'autre part, $z_0 \eta y$ et $x \eta (x \vee y)$, compte tenu de Z_2, donnent $(x \vee z_0) \eta (x \vee y)$, et $x \leqq x \vee z_0 \leqq x \vee y$ sera une η-suite. L'hypothèse $x << x \vee y$ entraîne $x \vee z_0 = x$ ou $x \vee z_0 = x \vee y$. De $x \vee z_0 = x$, on conclut $z_0 \leqq x$, donc $z_0 \leqq x \wedge y$, contredisant $x \wedge y < z_0$. De $x \vee z_0 =$

$=x\vee y$, compte tenu de $x\eta(x\vee y)$ et de $z_0\eta y$ ainsi que de Z_3, on conclut $[z_0\vee(x\wedge y)]=(z_0\vee x)\wedge y$, c'est-à-dire $z_0=y$, contredisant $z<y$.

Corollaire 1: — *La relation* $\bar{<}_\circ$ *est une relation d'invariance, si et seulement si* $x<_\circ x\vee y$ *implique* $x\wedge y<_\circ y$. On rappelera aussi l'exemple 1'), numéro précédent.

Théorème 5: — *En prenant la relation d'invariance* η, *si* $a<\!<b$ *et s'il existe une* η*-suite entre* $z\wedge b$, *alors on a* $a\wedge z<\!<b\wedge z$ *ou* $a\wedge z=b\wedge z$. Le théorème 3 montre l'existence d'une η-suite entre a et b de la forme $a\bar{<}a\vee\vee(b\wedge z)\bar{<}\cdots\bar{<}b$. En conséquence, $a<\!<b$ donne $a\vee(b\wedge z)=$ $=a$ ou $a\vee(b\wedge z)=b$. La première hypothèse donne $b\wedge z\bar{<}a$, donc $b\wedge z\bar{<}a\wedge z$, qui, jointe à $(a\wedge z)\bar{<}(b\wedge z)$, mène à $a\wedge z=$ $=b\wedge z$. La deuxième hypothèse, d'après le théorème précédent, compte tenu de $a<\!<b=a\vee(b\wedge z)$, implique $a\wedge\wedge(b\wedge z)<\!<b\wedge z$, c'est-à-dire $a\wedge z<\!<b\wedge z$.

§ 2. η-SUITES DE COMPOSITION

1) Problèmes d'existence — En supposant η une relation d'invariance, les théorèmes 6 et 7 ci-dessous sont des théorèmes d'existence de η-suites de composition.

Théorème 6: — *Si* $a=a_0\bar{<}a_1\bar{<}\cdots\bar{<}a_i\bar{<}\cdots\bar{<}a_n=c$ *est une* η*-suite et* $b=b_0\bar{<}b_1\bar{<}\cdots\bar{<}b_m=c$ *est une* η*-suite de composition, il existe des* η*-suites de composition entre* $a_i\wedge b_j$ *et* a_i. *En particulier: si* $a\eta c$ *et s'il existe une* η*-suite de composition* $b=b_0\bar{<}\cdots\bar{<}b_m=c$, *alors il existe une* η*-suite de composition entre* $a\wedge b_j$ *et* a. *De plus: si* $a=a_0\bar{<}a_1\bar{<}\cdots\bar{<}a_n=c$ *est aussi une* η*-suite de composition, il existe des* η*-suites de composition entre* $a_i\wedge b_j$ *et* a_k, $(k\bar{>}i)$, *et entre* $a_i\wedge b_j$ *et* b_l, $(l\bar{>}j)$. Nous nous bornons à la première assertion. Le théorème 5, compte tenu de la η-suite obtenue de la η-suite (2) du n.º

2, § précédent, en remplaçant j par $j+1$, et bien aussi de $b_j<\!<b_{j+1}$, (si cela est le cas), montre que $a_i\wedge b_j<\!<a_i\wedge\wedge b_{j+1}$, sauf si l'on a $a_i\wedge b_j=a_i\wedge b_{j+1}$. Par conséquent, la partie de la η-suite (1) du même n.º 2 qui finit en a_i est une η-suite de composition.

Théorème 7: — *En prenant la relation d'invariance* η, *si l'on a* $a\eta c$ *et s'il existe des* η*-suites de composition* $a=a_0\bar{<}\bar{<}a_1\bar{<}\cdots\bar{<}a_n=c$ *et* $b=b_0\bar{<}b_1\bar{<}\cdots\bar{<}b_m=c$, *alors il existe une* η*-suite de composition* $a\wedge b\bar{<}a\wedge b_1\bar{<}\cdots\bar{<}\cdots\bar{<}a\wedge b_{m-1}\bar{<}a\bar{<}\bar{<}a\vee(a_1\wedge b)\bar{<}\cdots\bar{<}a\vee(a_{n-1}\wedge b)\bar{<}a\vee b\bar{<}a\vee b_1\bar{<}\cdots\bar{<}a\vee\vee b_{m-1}\bar{<}c$. Sans doute que $a\wedge b\bar{<}a\wedge b_1\bar{<}\cdots\bar{<}a\bar{<}c$ est une η-suite, dont la partie entre $a\wedge b$ et a est de composition; et $a\wedge b\bar{<}a_1\wedge b\bar{<}\cdots\bar{<}a_{n-1}\wedge b\bar{<}b\bar{<}b_1\bar{<}\cdots\bar{<}b_{m-1}\bar{<}c$ est une η-suite de composition. Alors, on construit la subdivision suivante de la première η-suite, dans la partie entre a et c: $a\bar{<}a\vee(a_1\wedge b)\bar{<}\cdots\bar{<}a\vee(a_{n-1}\wedge b)\bar{<}a\vee b\bar{<}a\vee b_1\bar{<}\cdots\bar{<}c$.

2) Questions de longueur — Revenons à la première partie du théorème 6. On peut admettre que la suite de composition $b=b_0<\!<b_1<\!<\cdots<\!<c$ ne contient pas des répétitions. Alors, si l'on observe la construction de la η-suite de composition entre $a_i\wedge b_j$ et a_i, on constate la relation $c_\eta(a_i\wedge b_j,a_i)\bar{<}c_\eta(b_j,c)$. Supposons maintenant $c=$ $=a_i\vee b_j$ et que tout élément z qui puisse appartenir à une η-suite entre b_j et c, vérifie l'égalité $b_j\vee(a_i\wedge z)=(b_j\vee a_i)\wedge z$. Dans ces conditions, $b_l<\!<b_{l+1}$, $(l\bar{>}j)$, donne aussi $a_i\wedge\wedge b_l<\!<a_i\wedge b_{l+1}$, car l'égalité $a_i\wedge b_l=a_i\wedge b_{l+1}$ impliquerait $b_j\vee(a_i\wedge b_l)=b_j\vee(a_i\wedge b_{l+1})$, donc, puisque $b_j\bar{<}b_l\bar{<}c$, $(b_j\vee\vee a_i)\wedge b_l=(b_j\vee a_i)\wedge b_{l+1}$, c'est-à-dire $b_l=b_{l+1}$. Avec l'hypothèse sur z, on arrive ainsi à $c_\eta(a_i\wedge b,a_i)=c_\eta(b_j,c)$. En particulier, les hypothèses $a\vee b=c$, $b\vee(a\wedge z)=(b\vee a)\wedge z$, pour tout z qui puisse appartenir à une η-suite $b\bar{<}\cdots\bar{<}\bar{<}z\bar{<}\cdots\bar{<}a\vee b$, donnent $c_\eta(a\wedge b,a)=c_\eta(b,a\vee b)$. Nous démontrerons une réciproque, de façon à justifier l'énoncé que voici:

Théorème 8 :— *Admettons l'existence d'une η-suite de composition $b=b_0\leqq b_1\leqq\cdots\leqq b_m=a\vee b$ ainsi que d'une η-suite $a=a_0\leqq a_1\leqq\cdots\leqq a_n=a\vee b$. On a l'inégalité $c_\eta(a\wedge b\,,a)\leqq c_\eta(b\,,a\vee b)$. Alors, il faut et il suffit, pour qu'on ait $c_\eta(a\wedge b\,,a)=c_\eta(b\,,a\vee b)$, que, pour tout z tel que $b\leqq\cdots\leqq z\leqq\cdots\leqq a\vee b$ soit une η-suite, on ait $b\vee(a\wedge z)=(b\vee a)\wedge z$.* Il reste à montrer la «nécessité» de la partie finale de l'énoncé. Prenons la η-suite $a=a_0\leqq a_1\leqq\cdots\leqq a_n=a\vee b$ ainsi que la η-suite de composition $b=b_0<<b_1<<\cdots<<b_m=a\vee b$. Si z appartient à une η-suite entre b et $a\vee b$, nous pouvons admettre que cette η-suite est de composition :

$$b=b'_0<<b'_1<<\cdots<<b'_t=z<<z_1<<\cdots<<z_k=a\vee b.$$

On en tire une η-suite de composition

$$(1)\qquad a\wedge b=a\wedge b'_0<<a\wedge b'_1<<\cdots<<a\wedge b'_t=$$
$$=a\wedge z<<a\wedge z_1<<\cdots<<a\wedge z_k=a,$$

car, d'après notre hypothèse, $c_\eta(a\wedge b\,,a)=c_\eta(b\,,a\vee b)$. Alors, si l'on considère les deux η-suites

$$a\wedge b=a\wedge b'_0\leqq\cdots\leqq a\wedge b'_t=a\wedge z\leqq\cdots\leqq a\wedge z_k=a=$$
$$=a_0\leqq a_1\leqq\cdots\leqq a_n=a\vee b,$$

$$a\wedge b=a_0\wedge b\leqq a_1\wedge b\leqq\cdots\leqq a_n\wedge b=b=b'_0\leqq b'_1\leqq\cdots\leqq b'_t=$$
$$=z\leqq z_1\leqq\cdots\leqq z_k=a\vee b,$$

on sait qu'elles admettent des η-subdivisions équivalentes. La subdivision de la deuxième entre b'_i et b'_{i+1} contient l'élément $b'_i\vee(b'_{i+1}\wedge a\wedge z)$, donc, compte tenu de $b'_i<<b'_{i+1}$, ou bien $b'_i=b'_i\vee(b'_{i+1}\wedge a\wedge z)$ ou $b'_{i+1}=b'_i\vee(b'_{i+1}\wedge a\wedge z)$. La première hypothèse donnerait $b'_i=b'_i\vee(b'_{i+1}\wedge a)$ et on aurait $b'_i\geqq b'_{i+1}\wedge a$, $b'_i\wedge a\geqq b'_{i+1}\wedge a$, ce qui entraînerait $b'_i\wedge a=b'_{i+1}\wedge a$, en contredisant (1). On aura par conséquent

$b'_{i+1}=b'_i\vee(b'_{i+1}\wedge a\wedge z)$, d'où l'on conclut $b'_{i+1}\vee(a\wedge z)=b'_i\vee\vee(a\wedge z)$. En faisant successivement $i=0\,,1\,,2\,,\ldots,t-1$, on obtient

$$b\vee(a\wedge z)=b'_1\vee(a\wedge z)=\cdots=b'_t\vee(a\wedge z)=z=(b\vee a)\wedge z.$$

Le théorème est démontré.

Théorème 9 :— *S'il existe $0\in R$ et si $a\leqq\cdots\leqq a\vee b$ et $b\leqq\leqq\cdots\leqq a\vee b$ sont des η-suites, alors l'existence de $c_\eta(a\vee b)$ implique l'existence de $c_\eta(a)$, $c_\eta(a\,,a\vee b)$, $c_\eta(a\wedge b\,,a)$, $c_\eta(a\wedge b)$, et on a $c_\eta(a)+c_\eta(b)\leqq c_\eta(a\wedge b)+c_\eta(a\vee b)$. Le signe $=$ de cette relation est à employer, si et seulement si, $\forall z\in R$ qui puisse appartenir à une η-suite entre a et $a\vee b$, on ait $a\vee(b\wedge z)=(a\vee b)\wedge z$.* Puisqu'il existe une η-suite de composition $0\leqq\cdots\leqq a\vee b$ et une η-suite $a\leqq\cdots\leqq a\vee b$, le théorème 6 montre qu'il existe une η-suite de composition $0\leqq\cdots\leqq a$, donc il existe $c_\eta(a)$. D'une façon analogue, il existe $c_\eta(b)$. Ensuite, $0\leqq\cdots\leqq a\leqq\cdots\leqq a\vee b$ est une η-suite et $0\leqq\cdots\leqq\leqq a\vee b$ est une η-suite de composition, donc on peut subdiviser la première et obtenir une η-suite de composition $a\leqq\cdots\leqq a\vee b$, en tant qu'une partie de la subdivision. Ainsi, $c_\eta(a\,,a\vee b)$ existe. D'une façon analogue,il existe $c_\eta(b\,,a\vee b)$. Alors, il existe aussi des η-suites de composition $a\wedge b\leqq\leqq\cdots\leqq b$ et $a\wedge b\leqq\cdots\leqq a$, donc il existe $c_\eta(a\wedge b\,,b)$ et $c_\eta(a\wedge b\,,a)$, et on a d'ailleurs, conformément au théorème 8, $c_\eta(a\wedge b\,,b)\leqq c_\eta(a\,,a\vee b)$, $c_\eta(a\wedge b\,,a)\leqq c_\eta(b\,,a\vee b)$. Enfin, les η-suites de composition $0\leqq\cdots\leqq a$ et $a\wedge b\leqq\cdots\leqq a$ assurent l'existence de η-suites de composition entre 0 et $a\wedge b$, donc il existe $c_\eta(a\wedge b)$. Et on a

$$c_\eta(a\vee b)+c_\eta(a\wedge b)=c_\eta(a\wedge b)+c_\eta(a\wedge b\,,b)+c_\eta(b\,,a\vee b)+$$
$$+c_\eta(a\wedge b)\geqq c_\eta(a\wedge b)+c_\eta(a\wedge b\,,b)+$$
$$+c_\eta(a\wedge b\,,a)+c_\eta(a\wedge b)=c_\eta(b)+c_\eta(a).$$

La partie finale du théorème revient à la partie finale du théorème 8.

§ 3. ÉLÉMENTS SOUS-INVARIANTS. ÉLÉMENTS DE COMPOSITION

1) Définitions et premières propriétés—Supposons qu'il existe $u \in R$ et soit η une relation d'invariance. Si l'on a $a = u$ ou s'il existe une η-suite entre a et u, nous dirons a un *élément sous-invariant;* et, si $a = u$ ou s'il existe une η-suite de composition entre a et u, nous dirons a un *élément de composition.* Aussi bien l'ensemble S des sous-invariants que que l'ensemble C des éléments de composition constituent des inf demi-treillis de R (th. 1 et 6).

THÉORÈME 10:—*Pour les éléments de S ou de C, la relation $a <\circ b$ signifie $a << b$ en R.* Nous ferons la démonstration en admettant $a, b \in S$. Si l'on a $a <\circ b$, sans doute $a \neq b$. D'autre part, il existe des η-suites entre $a \wedge b = a$ et b et tous les éléments de ces suites sont des sous-invariants, donc, compte tenu de $a <\circ b$, on ne peut avoir que $a << b$. Réciproquement, à partir de $a << b$, avec $a, b \in S$, il n'existe pas $z \in S$ tel que $a < z < b$, car $a \eta b$ entraînerait $a \eta z$, et, d'autre part, l'existence de η-suite entre z et b impliquerait l'existence d'une η-suite $a < z < \cdots < b$, contredisant $a << b$.

THÉORÈME 11:—*En S, ou C, la condition duale du quadrilatère est valable* [4]. Supposons, par exemple, $a, b \in C$ et $a \neq b, a <\circ d, b <\circ d$. Compte tenu du théorème précédent, on a $a << d, b << d$, en R. Le théorème 7 assure l'existence d'une η-suite de composition $a \wedge b \eqslantless \cdots \eqslantless a \eqslantless \cdots \eqslantless a \vee b \eqslantless \cdots \eqslantless d$. On ne peut pas avoir $a \vee b = a$, car cette égalité entraînerait $b \eqslantless a$ et $b < a < d$ serait une η-suite à contredire $b << d$. Par conséquent, $a \vee b = d$ et $a << a \vee b$, ainsi que $b << a \vee b$. D'après le théorème 4, on en conclut $a \wedge b << a, a \wedge b << b$, donc, puisque $a \wedge b \in C$, $a \wedge b <\circ a$ et $a \wedge b <\circ b$.

THÉORÈME 12:—*C est un treillis conditionnellement complet, dual d'un treillis de Birkhoff* [1]. D'après le théorème précédent, nous n'avons qu'à montrer que C est un treillis conditionnellement complet. D'abord, C est un inf demi-treillis. Nous allons montrer que tout couple $\{a, b\}$ d'éléments de C admet un supremum dans C. Soit $M \subseteq C$ l'ensemble des majorants de a et b. M contient $u \in C$ et on a $M \neq \phi$. Si $x_0 \in M$ n'est pas le supremum de a et b, il existe $x_1 \in M$ tel que $x_0 > x_1$. Si x_1 n'est pas le supremum en question, il existe $x_2 \in M$ tel que $x_0 > x_1 > x_2$, et on peut poursuivre. Si l'on suppose $c_\eta(a, x_0) = n$, on ne peut pas avoir une suite $x_0 > x_1 > \cdots > x_n > a$, car cette suite, d'après le théorème 6, pourrait être plongée dans une η-suite de composition de longueur $> n$. Par conséquent, on arrive à obtenir $x_k = \sup\{a, b\}$. Maintenant que nous savons que C est un treillis, il suffit de voir que tout ensemble minoré de C admet un infimum ou que la condition de chaîne ascendante affaiblie [1] est verifiée, pour reconnaître que C est un treillis conditionnellement complet. Or, soit $M_0 \subseteq C$ un ensemble dont a_0 est un minorant. Nous prendrons $y_0 \in M_0$; alors, s'il n'est pas l'infimum de M_0, il existe $y_1 \in M_0$ tel que $y_0 \not\leq\circ y_1$, avec $y_0 \wedge y_1 \in C$. Si $y_0 \wedge y_1$ n'est pas encore l'infimum de M_0, on prendra $y_2 \in M_0$ tel que $y_0 \wedge y_1 \not\leq\circ y_2$ et on poursuivra le raisonnement. En écrivant $y_0 > y_0 \wedge y_1 > y_0 \wedge y_1 \wedge y_2 > \cdots > a_0$, cette suite, en supposant $c_\eta(a_0, y_0) = n$, ne peut pas contenir plus de $n+1$ éléments, car l'existence de η-suites de composition entre $y_0 \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_{j+1}$ et $y_0 \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_j$ entraînerait l'existence d'une η-suite de composition entre a_0 et y_0 de longueur $> n$. Par conséquent, M_0 admet un infimum et C est un treillis conditionnellement complet. C est même un treillis complet, si l'infimum de tous les éléments de composition est un élément de composition.

Remarque:—Il se lève la question d'introduire des conditions sur η de telle sorte que C devienne un sous-treillis de R. On remarquera, par exemple, que, pour la relation d'invariance 3'), n.° 2, § 1, les éléments 1 et 3 sont des éléments de composition mais qu'il n'en est pas ainsi pour $1 \vee 3 = 13$.

2) D'autres propositions concernant les sous-invariants— Les invariants, définis au n.° 2, § 1, sont des sous-invariants. Prenons deux invariants a et b et admettons l'existence de $c_\eta(a\vee b)$. De $a \eqslantless a\vee b \eqslantless u$, puisque $a\,\eta\,u$, on tire $a\,\eta\,(a\vee b)$. De même $b\,\eta\,(a\vee b)$. Alors, le théorème 9, mène à $c_\eta(a)+c_\eta(b)=c_\eta(a\wedge b)+c_\eta(a\vee b)$, pourvu que, $\forall z\in R$ appartenant à une η-suite $a\eqslantless\cdots\eqslantless z\eqslantless\cdots\eqslantless a\vee b$, on ait $a\vee(b\wedge z)=(a\vee b)\wedge z$. Or, $\forall z\in R$ tel que $a\eqslantless z$, on a $a\,\eta\,z$. La condition Z_3 donne justement, à partir de $b\,\eta\,u$ et $a\,\eta\,z$, la modularité $a\vee(b\wedge z)=(a\vee b)\wedge z$. Puis, le théorème 8 entraîne les relations $c_\eta(a\wedge b, a)=c_\eta(b, a\vee b), c_\eta(a\wedge b, a)=c_\eta(a, a\vee b)$. Par conséquent:

Théorème 13:—*Si a et b sont deux invariantes et s'il existe $c_\eta(a\vee b)$, on a les relations que voici:* $c_\eta(a)+c_\eta(b)=$ $=c_\eta(a\wedge b)+c_\eta(a\vee b)$; $c_\eta(a\wedge b, a)=c_\eta(b, a\vee b)$; $c_\eta(a\wedge b, b)=$ $=c_\eta(a, a\vee b)$.

Remarque:—En tant qu'une application du théorème 3, on remarquera que le supremum d'un invariant et d'un sous-invariant est un sous-invariant.

Théorème 14:—*Si* 0 *est un élément de composition, on a* $C=S$. D'une part, il existe une η-suite de composition $0\eqslantless\cdots\eqslantless u$; et, d'autre part, il existe une η-suite $a\eqslantless\cdots\eqslantless u$, pour tout $a\in S$. Par conséquent, il existe une η-suite de composition entre 0 et a, et la η-suite $0\eqslantless\cdots\eqslantless a\eqslantless\cdots\eqslantless u$ peut être subdivisée pour donner une η-suite de composition. Par conséquent $a\in C$.

Remarque:—Un raisonnement analogue montre que, si l'infimum des sous-invariants existe et est un élément de composition, on a de même $C=S$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Almeida Costa, A.: *Cours d'Algèbre Générale,* Vol. I, Lisboa, (1969).

2. Livšic, A. H.: *On the Jordan-Hölder theorem in structures.* Translations Am. Math. Soc., Algebra, vol. I (1962).

3. Noronha Galvão, M.ª L.: *Sobre o theorema de Jordan-Hölder em reticulados,* Lisboa (1970).

4. Ore, O.: *On chains in partially ordered sets.* Bull. Am. Math. Soc. **49**, 558-566 (1943).